# Středoškolská technika 2012

**Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT**

# Počátky historie teorie množin


**Martina Fabianová**

Gymnázium, Brno-Řečkovice

Terezy Novákové 2, Brno


**Konzultanti**: Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.
Mgr. Jan Herman

**Prohlášení**

*Prohlašuji, že jsem svou práci vypracovala samostatně, použila jsem pouze podklady (literaturu, internet) citované v práci a uvedené v přiloženém seznamu a postup při zpracování práce je v souladu se zákonem č 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) v plném znění.*

Martina Fabianová

V Brně dne 19. února 2012

Podpis:…………………………...

**Poděkování**

*Na tomto místě bych chtěla poděkovat doc. RNDr. Eduardu Fuchsovi, CSc. za odbornou konzultaci mé práce, cenné rady a připomínky a za veškerý čas, který mi věnoval. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Janu Hermanovi, a to zejména za trpělivost a pevné nervy. Můj dík patří také Mgr. Daně Tellerové za pomoc s korekturou práce a Mgr. Jakubu Vojtovi, Ph.D.*

# Anotace

Středoškolská odborná činnost s názvem „Počátky historie teorie množin“ je věnována zejména lidem, kteří nechtějí číst složité strany zaplněné spletitými matematickými vzorci, nýbrž je zajímá právě ona filosoficko-historická část. Práce přináší poutavou formou pojatý historický přehled vývoje pojmu nekonečno a postupného vzniku teorie množin, jednoho ze základních stavebních kamenů soudobé matematiky. Pokouší se objasnit vznik termínů jako je množina, mohutnost množiny či kardinální číslo. Práce je rozdělena do čtyř větších a navzájem provázaných celků.

První a nejobsáhlejší část se věnuje českému knězi, filosofu a matematikovi Bernardu Bolzanovi a rozboru jeho spisu „Paradoxy nekonečna“. Jako největší zásluhu tohoto svazku považujeme obhajobu aktuálního nekonečna a charakteristiku nekonečných množin. Následně se zaměřuje na *zakladatele naivní teorie množin* Georga Cantora a jeho dílo, přičemž se snaží čtenáři nastínit některé z vlastností množin, kterými se Cantor za svého života zabýval. V další části přináší krátký přehled antinomií, které byly v Cantorově intuitivní teorii množin postupně objeveny a jež vedly ke zrodu třetí krize matematiky. Nakonec zahrnuje krátký nástin několika řešení, jež se matematikům postupem času nabídly.

*Klíčová slova*: teorie množin, množina, potenciální nekonečno, aktuální nekonečno, vzájemné jednoznačné zobrazení, antinomie

# Abstract

The high school thesis “The beginnings of Set Theory“ is devoted particularly to people who do not want to read complicated pages full of complex mathematical formulas but who are rather interested in the philosophic-historical part. My work brings an attractive historical summary of the development of the term “infinity” and the gradual formation of the “set theory”, which is one of the essential building blocks of the contemporary mathematics. It tries to clarify the origin of terms such as set, cardinality or cardinal number. The work is divided into four interwoven parts.

The first and the most extensive one is dedicated to the Czech priest, philosopher and mathematician Bernard Bolzano and to the analysis of his work „Paradoxy nekonečna (Paradoxes of the infinite)“. The biggest achievement of this book is considered to be the supporting idea of actual infinity and the characteristic of infinite sets. Furthermore this work is devoted to “the founder of intuitive set theory”, Georg Cantor and his work, trying to explain some of the set characteristic, with which Cantor occupied himself during his life, to the reader. The next part brings a short overview of antinomies which are reviewed in Cantor´s intuitive set theory. They were gradually discovered and led to the third mathematical crisis. Finally, it includes a short schema of a few solutions, which were gradually accepted by mathematicians.

*Key words*: set theory, set, potential infinity, actual infinity, bijection, antinomy

# Obsah

1. Úvod ... 8

1.1. Historické souvislosti ... 9

1.2 Nekonečný hotel ... 10

2. Bernard Bolzano ... 11

2.1. Krátký úvod do života ... 11

2.2. Paradoxy nekonečna ... 12

2.2.1. Proč se zabývat nekonečnem? (§ 1) ... 14

2.2.2. Množina jako souhrn jednotlivých částí. (§ 3, § 4) ... 14

2.2.3. Pojem nekonečno. (§ 9, § 10) ... 15

2.2.4. Obhajoba aktuálního nekonečna. (§ 11, 12, 14, 15) ... 15

2.2.5. Existují nekonečné množiny? (§ 13) ... 16

2.2.6. Jedno nekonečno větší než druhé. (§ 19) ... 16

2.2.7. Opravdu existuje jednoznačné zobrazení. (§ 20) ... 16

2.2.8. Počet prvků konečných množin. (§ 22, 23) ... 17

2.2.9. Odraz víry. (§ 25) ... 18

2.2.10. Bolzanovo využití nekonečna. (§ 28) ... 18

2.3. Závěr a důsledky Bolzanova díla ... 19

3. Georg Cantor ... 20

3.1. Život a dílo ... 20

3.2. Cantorova práce ... 20

3.2.1. Množina ... 21

3.2.2. Spočetná množina ... 21

3.2.3. Nespočetná množina ... 22

3.2.4. Cantorova diagonální metoda ... 23

3.2.5. Mohutnost množiny a kardinální číslo ... 24

3.2.6. Hypotéza kontinua ... 25

3.3. Závěr plynoucí z Cantorovy práce ....26
4. Antinomie teorie množin....27
4.1. Úvod aneb proč používat pojem antinomie....27
4.1.1. Russellova antinomie (paradox holiče)....27
4.1.2. Cantorova antinomie ....28
4.1.3. Richardova antinomie ....28
4.1.4. Antinomie Berryho....28
4.2. Co z antinomií vyplynulo....29
5. Řešení situace....30
5.1. Úvod....30
5.1.1. Intuicionistický přístup....30
5.1.2. Formalistický přístup ....30
5.1.3. Axiomatizace teorie množin ....31
5.1.4. Zermelo-Fraenkelův axiomatický systém ....31
5.1.5. Gödel-Bernaysova teorie tříd ....31
5.1.6. Axiom výběru....32
5.2. Dodnes nepřekonaná krize ....32
6. Závěr ....33
Seznam informačních zdrojů....34
a) Literatura....34
b) Internetové zdroje ....34
c) Elektronická monografie....35
Seznam citací ....36
Seznam obrázků ....38

# 1. Úvod

*Dnes již víme, že po logické stránce lze téměř celou současnou matematiku odvodit z jediného zdroje – z teorie množin.*

*N. Bourbaki* [1]

Jako téma své středoškolské odborné činnosti jsem si zvolila práci s názvem „Počátky historie teorie množin“. Již studenti středních škol by měli mít základní znalosti z dané problematiky. Já se nesnažím o precizní definice a složité matematické úkony, naopak se čtenáři pokouším přiblížit nejdůležitější poznatky, které postupně vedly ke zrodu tohoto oboru.

Práce je rozdělena do čtyř obsáhlejších kapitol, které se navzájem doplňují a průběžně na sebe navazují. První, s názvem „Bernard Bolzano“, se věnuje českému knězi, filosofu a matematikovi 18. století. Nejprve přináší krátký výtah ze života tohoto myslitele, následné a stěžejní odstavce rozebírají poslední, avšak klíčový spis z konce autorova života, „Paradoxy nekonečna.“ Pro mou práci nejdůležitější paragrafy Bolzanova díla obhajují postavení aktuálního nekonečna a přináší první charakteristiku nekonečných množin.

Další kapitola se zaměřuje na dílo Georga Cantora, právem nazývaného *zakladatel naivní teorie množin*. Nejprve se věnuje krátkému výtahu z matematikova života, poté se snaží popsat několik vybraných stěžejních pojmů a vlastností množin, kterými se Cantor zabýval. Třetí oddíl přináší stručný přehled některých antinomií, které byly v Cantorově intuitivní teorii postupem času objeveny a které vedly ke zrodu třetí krize matematiky. Antinomie, jež se v této práci objevují, jsou spíše ilustrující a pokouší se čtenáři přiblížit situaci, která po jejich odhalení postupně nastala. Poslední část práce zahrnuje nástin několika řešení, které se matematikům následně nabídly.

Jako hlavní cíl své práce jsem si vytyčila odlehčeným a čtivým způsobem shrnout základní poznatky zabývající se počátky historie teorie množin, zejména potom vývoj pojmu nekonečno, historie pojmu množina a některé další důležité termíny, zasahující do dané oblasti. Dalším cílem je rozbor části spisu „Paradoxy nekonečna“, který bývá často chápán jako první hybatel v historickém vývoji teorie množin.

## 1.1. Historické souvislosti

Již odedávna se lidé zabývali nekonečnem. Uveďme kupříkladu řeckého filosofa Zenona, který pomocí nekonečna ukazoval nemožnost pohybu. Tehdy říkal něco ve smyslu: „Třetí důkaz je nyní ten, že letící šíp stojí. Pokud je totiž všechno vždy buď v klidu nebo se pohybuje, (nic se však nepohybuje), tak pokud je ve stejném (místě), je v něm nyní jako vždy se pohybující, [všechno je nyní ve stejném místě], pak je letící šíp nehybný.[2]“. Tedy má-li šíp proletět jistou vzdálenost, musí nejprve proletět polovinu této vzdálenosti. Než však proletí polovinu, musí proletět její čtvrtinu, osminu, atd. A jelikož toto dělení nikdy nekončí, šíp se nikdy nepohne z místa.[3]“ Ve středověku se scholastická věda zaobírala kupříkladu otázkou, kolik andělů se vejde na špičku jehly; zda konečně či nekonečně mnoho. Kolem 17. století se matematika obrátila k *nekonečně velké a nekonečně malé veličině*. Tehdy bylo ovšem nekonečno chápáno jako něco neustále rostoucího, tedy *potenciálního*. Potenciální nekonečno si nejlépe představme jako veličinu, která se pořád zvětšuje a jejíž velikost neustále stoupá, jak uvádí Aristoteles ve své třetí knize Fysiky: „Vůbec existuje nekonečno pouze v tom smyslu, že se vezme vždy jiné a opět jiné, vždy však konečné, avšak různé a opět různé.“ V dnešní době však nejčastěji používáme nekonečno *aktuální*, tedy jeden celek, jednu ucelenou množinu, jejíž prvky jsou dány nezávisle na jejím vzniku.

## 1.2 Nekonečný hotel

Než čtenář začne číst mou práci, s dovolením bych mu ráda položila jednu velice zajímavou otázku, kterou jsem před několika lety dostala od svého tehdejšího učitele matematiky a fyziky, Mgr. Zdeňka Votavy.

*Představte si, že se ocitnete na recepci jednoho zajímavého hotelu, který má několik neobyčejných vlastností. Kupříkladu je nekonečně dlouhý, tedy přesně tak, že byste na jeho očíslování spotřebovali všechna přirozená čísla. Bohužel k vašemu zklamání je také úplně plný. A to takovým způsobem, že v každém pokoji bydlí právě a pouze jeden člověk. Hotel má jen jedno patro, do pokoje se více lidí opravdu nevejde a samozřejmě se nemůže ani nikterak přestavovat ani přistavovat. Žádný host také není natolik ochotný, aby kvůli vaší rozmařilosti hotel opouštěl a jel si hledat jiné místo. Vy ale nutně sháníte ubytování a jiná alternativa v nejbližším okruhu tisíce kilometrů není. Nezbývá tedy jiná možnost, než se pokusit najít ještě jedno volné místečko. Recepční si neví rady, tudíž řešení tohoto problému zůstává na nás.*

Nyní se prosím zkuste na chvíli zamyslet, jak byste tento příklad vyřešili vy. Je to jednoduché, ne? Stačí přece každého hosta požádat o to, aby se společně se svými několika zavazadly přestěhoval o jeden pokoj vedle. Člověk z prvního se přesune do druhého, z pátého do šestého atd. Říkáte si, zdali přece jenom nezbude na konci jeden člověk, který nebude mít kde spát? Ale náš hotel je přece nekonečně dlouhý! Osoba obývající pokoj č. 3847 se přesune do č. 3848, host z pokoje číslo $n$ se posune do pokoje $n+1$. A vzhledem k tomu, že místností je opravdu nekonečně mnoho, nikdy se nikdo nedostane do situace, kdy by se neměl kam přestěhovat, a vy se můžete v klidu ubytovat v první místnosti.

*Teď ale pozor, přicházíme k dalšímu problému. Vy už jste se samozřejmě v hotelu ubytoval, nyní se ale před recepcí vytvořila fronta, a aby toho nebylo málo, tato řada je vskutku nekonečně dlouhá.*

Myslíte si, že se tato spousta lidí do hotelu již opravdu nemůže vejít? Zkuste opět zapojit své mozkové závity. Jednu osobu jsme do pokoje vtěsnali pomocí posunu hostů přesně o jedno místo. O nekonečně mnoho míst samozřejmě všechny posunout nemůžeme, ale co třeba uvolnit každou druhou místnost? Osobu z pokoje č. 1 posuneme o jedno místo do pokoje č. 2, následně č. 2 přestěhujeme do č. 4, č. 3 do č. 6 a tak dále. Obecně budeme posouvat hosty pouze do pokojů se sudými čísly, tedy číslo $n$ se odstěhuje do čísla $2n$. Všechny liché pokoje zůstanou volné a nám nezbývá, než spokojně ubytovat netrpělivé zákazníky.

Zmíněný problém se nazývá Hilbertův hotel. Vymyslel ho německý matematik David Hilbert, aby na něm ukázal některé z vlastností nekonečných množin.

# 2. Bernard Bolzano

*Vše má svůj konec.*

*Bernard Bolzano, poslední dny života.* [4]

## 2.1. Krátký úvod do života

Bernard Bolzano se narodil 5. října 1781 v Praze jako syn italského obchodníka Bernarda a jeho ženy Cecilie. Chatrné zdraví mu nejprve znemožnilo pravidelně navštěvovat školu, nicméně roku 1791 vstoupil na piaristické gymnázium na Novém Městě pražském. Po ukončení svých gymnazijních studií se rozhodl pro filosofii na filosofické fakultě Univerzity Karlovy, následně i pro matematiku a fyziku. Při výběru svého povolání byl velice ovlivněn učebnicí A. G. Kästnera a jeho snahou o zdůvodnění každého poznatku, v čemž se výrazně lišil od ostatních vědců dané doby. Bolzanův zájem o matematiku se zakládal zejména na její filosofické části. Po ukončení zmíněných oborů přešel s touhou učit náboženství roku 1800 na bohosloveckou fakultu. Ani v době, kdy se rozhodl pro duchovní cestu, nezanedbával svou vědeckou činnost, a tak v roce 1804 vydal svou první práci „Úvahy o některých předmětech elementární geometrie“. O několik let později byl Bolzano jmenován profesorem filosofie a krátce nato vysvěcen na kněze. V následujících letech vydal několik dalších matematických spisů. Ve svém životě byl často pronásledován kvůli svobodomyslným náboženským názorům, díky nimž byl postupně zbaven svého učitelského postavení. Ve čtyřiceti dvou letech Bolzana jeho životní cesta zavedla do poměrně klidné Těchobuzi na Pacovsku. Tyto roky považujeme za velice příznivé jeho vědecké práci. Napsal zde své významné dílo „Vědosloví“[1], kde se zabývá převážně základy logiky. Kritické myšlenky vůči tehdejším sociálním poměrům obsáhl v díle „O nejlepším státě“. Smrt jeho dlouholeté opatrovnice Anny Hoffmanové ho přinutila k návratu do rodné Prahy. V posledních letech života se začal zabývat konceptem svého revolučního matematického spisu „Paradoxy nekonečna“. Ty ale poprvé vyšly až po autorově smrti, a to roku 1851. Bolzano – matematik, logik, filosof a národní myslitel umírá 18. prosince 1848.

[1] Německy Wissenschlaftslehre.

# 2.2. Paradoxy nekonečna

*Přesto, že od sepsání „Paradoxů nekonečna“ uběhlo 115 let*[2]*,*
*jež byly roky bouřlivého, revolučního vývoje matematiky a logiky,*
*přesto, že filosofické východisko Bolzanovo bylo mylné,*
*jeho dílo nepatří k těm, jež mají dnes pouze historickou cenu,*
*nýbrž je stále ještě živé, aktuální a podnětné.*

*Arnošt Kolman, předmluva k českému vydání Paradoxů nekonečna* [5]

„Paradoxy nekonečna“ jsou posledním spisem, kterým se Bolzano ve svém životě zabýval. Sepsal je, když pobýval sám, zasažen smrtelnou chorobnou, v Liběchově u Mělníka. Knihu dokončil v závěrečném roce svého života, tedy roku 1848. Poprvé bylo německy psané dílo[3] vydané až v roce 1851 v Lipsku. Pro tisk jej připravil Bolzanův žák dr. František Příhonský[4][6], který se autorovou prací zabýval.

Pokud čekáte dlouhý text plný matematických vzorečků, obsáhlých definic, vět a důkazů, budu vás muset zklamat. Naopak potěším ty z vás, kteří neholdují symbolické řeči matematiků a raději se ponoří do hloubky matematicko-filosofického spisu, (což může čtenář vzhledem k období, kdy byla kniha sepsána čekat), ty, kteří rádi čtou a přemýšlí nad přečteným a nemálo i ty, kteří by rádi zadumali nad myšlenkami jednoho z předních českých filosofů, respektive matematiků devatenáctého století.

Bolzano sám uvádí, že se snažil oprostit od subjektivních názorů ostatních vědců, přesto jsou jeho myšlenky poměrně idealizované a často zasahují až do věci autorovy víry. Bolzano demonstruje tehdejší představu nekonečna na pojmu *množina vět a pravd o sobě*, který chápe jako představu nekonečna, bez ohledu na skutečnost nebo předmětnost tohoto výrazu. Následně

[2] Nyní již 163.

[3] Vyšlo pod názvem „Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen, herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlass des Verfassers von Dr Fr. Přihonsky“.

[4] **František Příhonský** (1788, Praha – 1859, Budyšín) byl Bolzanův žák a věrný přítel, student teologie a filosofie na Univerzitě Karlově, kněz a asistent filosofie FF Univerzity Karlovy v Praze. Jeho práce byla zaměřena na dějiny filosofie a estetiku. Vydal některé z Bolzanových spisů a sepsal Bolzanovu bibliografii.

přirovnává boha k něčemu, co svou myslí všechny tyto pravdy obsáhne. Jak uvádí v Paradoxech:

*§ 13*

> *Množina*[5] *vět a pravd o sobě je nekonečná, jak se dá velice snadno nahlédnout; neboť vezmeme-li jakoukoli pravdu, na příklad větu, že vůbec existují pravdy, nebo ostatně jakoukoli jinou větu, kterou označíme A; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy „A je pravdivé" je odlišná od A sama…*
>
> *… ke každému členu této druhé řady existuje odpovídající člen předchozí řady tak, že k jakémukoli sebe většímu jejich počtu existuje stejně velký počet různých vět, a že takové věty samy o sobě existují, ať již je tvoříme nebo ne. Z toho pak plyne, že souhrnu všech těchto vět přísluší množství, které převyšuje libovolné číslo, tj. nekonečné množství.*

Kniha je uspořádána do § 70 paragrafů (kapitol), jež společně tvoří tři navzájem se doplňující a provázané části. Nejprve (§ 1 – § 28) se autor zabývá výkladem nekonečna, nekonečnými množinami a převážně teorií ve zmíněných oblastech. Následující kapitoly (§ 29 – § 37) ukazují čtenáři počítání s nekonečnými veličinami a ve třetím (§ 38 – § 70), neméně obsažném úseku spisu Bolzano aplikuje teorii do nauky o času, prostoru, fyzice a kosmologii.

Pro co největší přehlednost jsem Bolzanovy paragrafy rozdělila do menších celků, které budu postupně popisovat a rozebírat. Každý znak § znamená odkaz na danou část v Paradoxech, podle nichž by pro čtenáře nemělo být obtížné jakékoliv následné dohledání.

[5] V tomto překladu je užití pojmu množina spíše nadčasové, O. Zich tak přeložil slovo *der Inbegriff*, které je v současné době chápáno spíše jako souhrn, spojení nebo sloučení. Termín *množina* zavedl poprvé až Georg Cantor.

2.2.1. Proč se zabývat nekonečnem? (§ 1)

V § 1 Bolzano objasňuje, proč se rozhodl zabývat problematikou a paradoxy nekonečna. V několika dalších odstavcích potom uvádí čtenáře do tehdejší nauky o teorii nekonečna.

*§ 1*

*Jistě většina paradoxních tvrzení, s nimiž se setkáváme v oblasti matematiky, i když to nejsou všechna, jak soudí Kästner, jsou věty, které buď přímo obsahují pojem nekonečna, nebo se o něj nějakým způsobem opírají, pokusíme-li se o jejich důkaz.*

2.2.2. Množina jako souhrn jednotlivých částí. (§ 3, § 4)

Na tomto místě bych ráda upozornila na nepřesný překlad dr. O. Zicha, jelikož v českém vydání Paradoxů nekonečna několikrát používá termín *množina* (německy *die Menge*) i přes to, že tento výraz poprvé zavedl ve své práci až zakladatel naivní teorie množin, Georg Cantor. Bolzano ve svém díle používá německý pojem *der Inbegriff*, který bychom mohli do češtiny přeložit spíše jako *souhrn*. Jako jeho důležitý požadavek potom uvádí nezávislost na pořadí prvků a skutečnost, že žádná množina nemůže být podmnožinou sebe samé. Bolzano následně podotýká, že neuvažuje o prázdných a jednoprvkových množinách[6]. Z dnešního pohledu je důležité, že soubor chápe nejenom jako celek utvořený na základě určité společné vlastnosti (Měsíc, Země, Slunce), ale i jako souhrn několika zcela odlišných předmětů.

*§ 3*

*Je to pojem, který je základem spojky a, avšak má-li tak zřetelně vystoupit, jak to vyžadují v nesčetných případech účely matematické, právě tak jako filosofické, mohu jej vyjádřit nejvhodněji, jak jsem přesvědčen, slovy:* ***souhrn určitých věcí nebo celek složený z určitých částí****…*

*Neboť je-li například A toutéž věcí jako B, nemá ovšem smysl hovořit o souhrnu věcí A a B.*

*§ 4*

*Souhrn, který podřídíme takovému pojmu, vzhledem k němuž je* ***uspořádání částí souhrnu lhostejné*** *jmenuji množinou[7]; a množina, jejíž všechny části jsou chápány jako jednotky určitého druhu A, tj. jako předměty, které jsou podřazeny pojmu A, se nazývá množství druhu A.*

[6] V tomto se liší od Georga Cantora.

[7] Opět nepřesný překlad termínu *der Inbegriff*.

Vymezení tehdejší představy množiny bylo důležité pro práci tvůrce naivní teorie množin, Georga Cantora.

### 2.2.3. Pojem nekonečno. (§ 9, § 10)

V základní definici pojmu *nekonečno* se autor hodně opírá o představu lineární řady.

*§ 9*

> *Za tohoto předpokladu nazvu nekonečným množstvím takové množství, které je větší než každé konečné, tj. množství, které má samo takovou povahu, že každá konečná množina představuje pouze jeho část.*

### 2.2.4. Obhajoba aktuálního nekonečna. (§ 11, 12, 14, 15)

Velice důležité jsou odstavce knihy, v nichž Bolzano obhajuje postavení *aktuálního nekonečna* před, do té doby používaným, *potenciálním*. Zavrhuje pojetí Hegela[8][7], Cauchyho[9][8] a jiných matematiků, kteří nekonečno chápou jako neustále rostoucí veličinu. Aktuální nekonečno si v Bolzanově pojetí představme jako jeden celek, jednu ucelenou množinu; tato představa v poměrně nepozměněné podobě přetrvala až do dnešní doby. Autor dále zamítá pojmy mez nekonečného růstu a mez nekonečně malé veličiny (přičemž nula není nekonečně malá veličina). Moc úzký výměr je podle něj takový, že nekonečno je něco, co není schopno žádného zvětšení nebo k čemu již nelze nic připojit.

*§ 11*

> *Jestliže si myslí Hegel, Erdman a jiní, matematické nekonečno pouze jako veličinu, která je proměnná a jejíž růst nemá žádnou hranici (což ovšem mnozí matematikové, jak brzo uvidíme, stanovili jako výměr svého pojmu), pak s nimi sám souhlasím, když kritizují tento pojem jako veličinu do nekonečna pouze rostoucí, nikdy však nekonečna nedosahující.*

[8] **Georg Wilhelm Friedrich Hegel** (1770–1831) byl německý filosof a profesor univerzity v Jeně, Heidelbergu a Berlíně, hlavní představitel německé klasické filozofie.

[9] **Augustin Louis Cauchy** (1789–1857) byl francouzský matematik, člen Pařížské akademie a profesor na École polytechnique v Paříži. Ve své učebnici Cours d´analyse (1821) vytvořil základy aritmetizace analýzy a zpřesnil pojmy limita, spojitost, derivace, integrál, konvergence apod. Začal moderní pojetí teorie reálných funkcí, rozpracoval teorii funkcí komplexní proměnné a nové metody řešení diferenciálních rovnic.

V odstavci § 14 argumentuje těm, co existenci nekonečna popírají a obhajuje jej.

### 2.2.5. Existují nekonečné množiny? (§ 13)

V tomto paragrafu se autor obrací k otázce, zda opravdu jsou veličiny, které můžeme nazvat nekonečnými. Okamžitě si na ni sám kladně odpovídá, přičemž se opírá o tento příklad:

*§ 13*

> *… vezmeme-li větu, kterou označíme A; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy „A je pravdivé“ je odlišná od A sama;… Avšak podle téhož zákona, podle něhož z věty A vyvozujeme větu od ní odlišnou, kterou nazvu B, dá se opět z B vyvodit třetí věta C, a tak stále bez konce.*

### 2.2.6. Jedno nekonečno větší než druhé. (§ 19)

Při psaní své práce rozhodně nemůžu opomenout odstavec § 19, ve kterém se Bolzano, byť jen okrajově, obrací k myšlence existence různě velkých nekonečen. Podle jeho vlastního výkladu můžeme dvě odlišná nekonečna chápat jako dvě nekonečné řady, přičemž *je ale jedna podmnožinou druhé.*[10]

*§ 19*

> *Jak by například mohlo být někomu nejasné, že délka přímky postupující neomezeně ve směru aR, je nekonečná? A že přímku bR běžící v tomtéž směru od bodu b, musíme nazvat větší o úsek ba než aR? A že přímku, postupující neomezeně v obou směrech aR a aS musíme nazvat větší o veličinu, která je sama opět nekonečná? Atd. (viz Obrázek č. 1)*

### 2.2.7. Opravdu existuje jednoznačné zobrazení. (§ 20)

Již **Eukleides** ve svém životě došel ke tvrzení, že „celek je větší než pouhá jeho část“[9], které následně použil ve svých „Základech“ jako jeden z axiomů. Po mnoho následujících let většina filosofů brala tuto myšlenku jako fakt a hlouběji se jí nezabývala.

---

[10] Nyní nechávám na samotném čtenáři srovnání pojetí velikostí nekonečen Bolzana a Cantora.

Právě proto je pro nás stěžejní **Galileovo** dílo. Galileo se zaobírá stejnou otázkou a následně na ni i sám hledá odpověď ve formě zobrazení[11] přirozených čísel na jejich druhé mocniny (čtverce), vyvrací tedy Eukleidovu teorii a obhajuje existenci jednoznačného zobrazení jedné nekonečné množiny na její podmnožinu. Nicméně dále se již počítáním s nekonečnem nezabývá a zastává názor, že pro nekonečné systémy nemá otázka velikosti vůbec žádný smysl.

Bolzano ve spise vychází ze stejné myšlenky, a to, že *nekonečná množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině*; tedy nekonečná množina $A$ je podmnožinou nekonečné množiny $B$, proto mají obě stejně mnoho prvků. Ač se tohoto faktu využívá při porovnávání mohutností množin, Bolzano na rozdíl od Cantora zastává názor, že tento postup použít nelze. Oproti Galileovi počítání s nekonečnem nezavrhuje a zabývá se jím v následujících částech knihy.

*§ 20*

*Dvě množiny, obě nekonečné, mohou být k sobě v takovém vztahu, že je na jedné straně možno spojit ve dvojici každou věc, náležející jedné z nich, s věcí, náležející druhé z nich, tak, aby vůbec žádná věc v obou množinách nezůstala bez spojení ve dvojici a také žádná aby se nevyskytovala ve dvou nebo více dvojicích; a přitom je na druhé straně možno, aby jedna z obou množin obsahovala druhou jako svůj pouhý díl, takže množství, která ony množiny představují, jsou k sobě v nejrozmanitějších poměrech, považujeme-li věci v nich za stejné, tj. za jednotky.*

Tuto velice důležitou charakteristiku nekonečné množiny použil Dedekind ve své definici nekonečného systému, resp. množiny: „Systém $S$ se nazývá nekonečným, je-li podobný vlastní části sebe samého; v opačném případě se nazývá $S$ konečným systémem.“[10]

Naopak v kapitole § 21 Bolzano ukazuje, že jednoznačné zobrazení dvou množin nemusí rovnou znamenat jejich rovnost. Již prof. Hans Hahn ale ve svých poznámkách k Bolzanově práci uvádí, že autor bohužel nikde nedefinoval, co přesně rovností dvou množin rozumí. Naopak od něj se Cantor snaží vše co nejdetailněji upřesnit.

### 2.2.8. Počet prvků konečných množin. (§ 22, 23)

Zde Bolzano ukazuje, že u konečných množin je jednoznačné zobrazení jedné množiny na druhou ekvivalentní k počtu jejich prvků. Následně se zmiňuje o tom, že u nekonečných množin tento fakt většinou platit nemusí. Mýlí se, když si myslí, že jednoznačné zobrazení existuje mezi nekonečnými množinami vždy.

[11] Vzájemně jednoznačným zobrazením, resp. bijekcí, rozumíme relaci, kdy ke každému prvku množiny $A$ přiřadíme právě a pouze jeden prvek množiny $B$.

*§ 20*

*… že se nám zdaří sestavit jejich části do dvojic tak, jak jsme se již vícekrát zmínili, stačí ovšem za všech okolností k tomu, abychom je mohli prohlásit za zcela rovné i z hlediska množství jejich částí, jsou-li tyto množiny konečné.*

2.2.9. Odraz víry. (§ 25)

Kapitola § 25 je další ukázkou vlivu Bolzanovy víry na jeho práci. Pro nás je pak důležité, že nekonečno vidí nejenom ve formě boha, ale i mezi věcmi pro člověka běžnými a skutečnými.

2.2.10. Bolzanovo využití nekonečna. (§ 28)

Kapitolou § 28 autor pomyslně uzavírá první okruh knihy. Vyjmenovává zde jednotlivé nauky, ve kterých se čtenář může s paradoxy nekonečna setkat, a to zejména v obecné nauce o veličinách nebo v nauce o číslech.

*§ 28*

*Již pojem počítání s nekonečnem budí zdání, jak přiznávám, že skrývá vnitřní spor. Neboť chtít něco počítat znamená přece, pokusit se o jeho určení čísly. Jak se však chceme pokusit o určení nekonečna čísly – onoho nekonečna, které je podle vlastního výkladu vždy něčím, co považujeme za množinu, sestávající z nekonečně mnoha částí, tj. za množinu, která je větší než každé číslo, která tedy nemůže být určena údajem pouhého čísla*

Poté Bolzano předesílá, že počítání s nekonečnem není počítání v pravém slova smyslu, nýbrž určování poměru mezi dvěma nekonečny.

Ostatní části knihy se zabývají vymezením pojmů veličina, celé číslo, dále počítáním s nekonečnem, kosmologií apod., tudíž nejsou pro mou práci stěžejní a dále je nijak rozebírat nebudu.

## 2.3. Závěr a důsledky Bolzanova díla

Ve své práci jsem čerpala z prvního českého vydání z roku 1963, které přeložil a okomentoval prof. Dr. Otakar Zich; s předmluvou Arnošta Kolmana, který v ní vychází z marxistických pozic a napadá Bolzanovu snahu o odstranění subjektivistických názorů: „Bude to na prospěch budování socialismu v naší vlasti, a v intencích osvíceného vlastence a utopického socialisty Bernarda Bolzana.“[11]. O. Zich používá původní komentář německého matematika Hanse Hahna, doplňuje jej a snaží se přiblížit i některé další problémy.

Jako cíl Paradoxů si autor vzal ujasnění a ospravedlnění pojmu nekonečna, což se mu, troufám si říct, na jeho dobu velice zdařilo, jelikož právě charakteristiku nekonečných množin můžeme považovat za největší zásluhu tohoto krátkého, leč obsažného díla.

Jistě nesmím opomenout Bolzanův výměr aktuálního nekonečna, který, i přes to, že Bolzano nikdy nepoužil daný pojem, je dodnes (s malými úpravami) brán jako pravdivý a používaný.

Mezi autorovy nejdůležitější poznatky, které spadají do oboru teorie množin, patří především charakteristika nekonečné množiny. V celém díle čtenáře provází vzájemný vztah Bolzanovy filosofie a matematiky 19. století. Dále na rozdíl od jeho předchůdců nezavrhuje počítání s nekonečnými veličinami, nicméně pořád nepřipouští myšlenku, že by celek mohl být menší než součet jeho částí a naopak přijímá tvrzení, že nekonečná množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině. Rovněž nesmím opomenout část, kde Bolzano obhajuje postavení aktuálního nekonečna a vyvrací úvahy ostatních vědců, kteří s jeho názorem nesouhlasí. Jako chybu, které se Bolzano v knize dopouští, snad můžeme považovat nedostatečné definice některých pojmů, které jsou pro autorovu práci důležité.

# 3. Georg Cantor

*Vidím to, ale sám tomu nevěřím.*

*Georg Cantor* [12]

## 3.1. Život a dílo

Tři roky před Bolzanovým úmrtím se v roce 1845 v Petrohradu narodil zakladatel naivní teorie množin, Georg Cantor. Tento vynikající německý matematik působil mezi lety 1869 a 1913 jako profesor na Univerzitě v Halle. Ve svém životě napsal spoustu prací, ve kterých postupně budoval základy teorie množin. Musíme si uvědomit, že Cantor Bolzanovo dílo znal a také si ho cenil. Nenechal se odradit ani těžkostmi, které mu jeho práce přinášela. Kvůli jeho kladnému postoji k aktuálnímu nekonečnu se našla spousta odpůrců, kteří pro něj byli jistě velkou přítěží a vzhledem k mnoha útokům, jimž Cantor musel za svého života čelit, postupně propadá depresím. Poslední práci napsal roku 1897 a v roce 1918 umírá.

## 3.2. Cantorova práce

Na následujících několika stranách bych čtenáře ráda seznámila s pár základními poznatky a pojmy, které se objevily v Cantorově díle. Mnoho z nich je dnes všeobecně užíváno a jen některé musely projít základními úpravami.

### 3.2.1. Množina

I přes to, že je v současné době termín *množina* považován v podstatě za samozřejmý a učí se ho již děti na základní škole, tento výraz[12] se poprvé objevil až v roce 1879[13]. Podle Cantora „Množinou rozumíme každý soubor *M* určitých dobře rozlišitelných objektů našeho nazírání nebo našeho myšlení, shrnutých v jeden celek.“[13]. Jak může sám čtenář rychle rozpoznat, pojem množina zde není přesně definován, nýbrž je nahrazen obdobnými slovy *soubor* a *celek*. Z toho plyne, že Cantor množinu chápe jako jeden ze základních a dále nedefinovatelných pojmů. Cantorovo vymezení je poměrně hodně obecné, dále je nikterak nerozebírá, a tedy ani neuvádí, co přesně oním *souborem* myslí.

### 3.2.2. Spočetná množina

Některé nekonečné množiny můžeme jednoduše očíslovat. Vezměme si kupříkladu všechna přirozená čísla. U nich se už ani snažit nemusíme, jelikož tento úkol zvládly za nás: *1, 2, 3, 4,…n, n+1,…*. Očíslovat nějakou množinu znamená nějakým způsobem přiřadit každému jejímu prvku právě a pouze jedno toto přirozené číslo. Zkusme se dále podívat na množinu celých čísel: *…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…*. Abychom postupně přiřadili každému jejímu prvku jeden prvek z množiny čísel přirozených, museli bychom některé z nich rozdvojit, a to přece nechceme. Nicméně pokusme se druhou množinu trochu přeskupit a utvořit z ní posloupnost, která má počátek, ale nemá konec, stejně jako přirozená čísla: *0, 1, -1, 2, -2, 3, -3…*. Teď již nebude přiřazení těchto dvou množin nic těžkého. A jelikož jsou obě nekonečné, jistě nevadí, že číslu -1 náleží 2 a číslu 2 odpovídá 3. Nyní společně zkusíme trochu zapřemýšlet. Představme si kladná racionální čísla, tedy množinu všech zlomků, zapsaných jako podíl dvou kladných celých čísel, kupř.: *1/2,… 2/5,… 3/7,…*. Je pro vás těžké představit si, jak tuto množinu jednoduše uspořádat? Podle velikosti bychom ji opravdu neseřadili, na to rovnou zapomeňme. Nejprve vedle sebe zkusme vypsat všechny zlomky, které mají jako svého dělitele jedničku.

1/1, 2/1, 3/1, 4/1,…

[12] Německy die Menge.

[13] V Cantorově práci s názvem „Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts“.

Teď pod ně hezky přidáme čísla dělitelná dvojkou, následně trojkou, atd.

1/1, 2/1, 3/1, 4/1,…

1/2, 2/2, 3/2, 4/2,…

1/3, 2/3, 3/3, 4/3,…

1/4, 2/4, 3/4, 4/4,…

… … … …

Mohli bychom samozřejmě pokračovat, ale pro názornou představu nám stačí tato krátká ukázka. Nyní se pokusíme tabulku očíslovat. Po řádcích to zřejmě nepůjde, jelikož už na ten první bychom spotřebovali všechna naše přirozená čísla, vymyslíme tedy jiný způsob. Co třeba po čtvercích? Zlomku 1/1 přiřadíme číslo 1 → 2/1 bude odpovídat 2 → následuje 2/2 (toto číslo ale v naší řadě již jednou máme ve formě zlomku 1/1, tudíž ho můžeme beztrestně vynechat) → 1/2 → 3/1 → 3/2 → 3/3 vynecháme → 2/3 → 1/3 → 4/1,… Tímto způsobem lze pokračovat opravdu až donekonečna, pouze musíme dát pozor, abychom každé číslo započítali pouze a jen jednou. Očíslovat všechna (tedy i záporná) racionální čísla by pro nás neměl být problém, stačí si utvořit dvě tabulky a budeme postupovat obdobně jako u čísel celých, tedy kladné tabulce budou odpovídat lichá a záporné sudá přirozená čísla. Každá nekonečná množina, kterou lze nějakým způsobem očíslovat, se nazývá *spočetná*. Její mohutnost *(viz kapitola 3.2.5.)* se značí $\aleph_0$[14] a její velikost je ze všech nekonečných množin nejmenší. Z toho plyne, že pokud je množina nekonečná, je buď ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel (respektive můžeme jí očíslovat, přiřadit jí všechna přirozená čísla), nebo je její velikost o něco větší.

### 3.2.3. Nespočetná množina

Podobně jako v předchozím odstavci se nyní pokusíme očíslovat množinu reálných čísel. Reálná jsou všechna, která mají buď konečný, nebo nekonečný desetinný rozvoj, tedy mimo jiné zahrnují jak množinu celých, tak i přirozených čísel. Otázkou je, zda má množina reálných čísel stejnou velikost jako její zmíněné podmnožiny, či nikoliv. Pro zjednodušení příkladu se podívejme pouze na interval od 0 do 1. Mezi jakýmikoliv dvěma reálnými čísly existuje alespoň jedno další. Kupříkladu mezi 0,1 a 0,2 nalezneme 0,11; mezi 0,11 a 0,12 leží 0,111; mezi 0,111 a 0,112 je 0,1111 atd. Je tedy zřejmé, že reálných čísel v intervalu (0,1) je opravdu nekonečně mnoho, stejně jako mezi čísly 0,1 a 0,2. Množině všech reálných čísel nemůžeme přiřadit čísla přirozená tak, aby žádné z nich nechybělo ani nepřebývalo. Každou množinu, kterou se nám nepodaří očíslovat, pojmenujme *nespočetná*. Nespočetná samozřejmě nejsou pouze reálná čísla, ale i čísla iracionální (každé reálné, jež není racionálním) či komplexní. Nejenom v intervalu

[14] *Alef nula*; alef je první písmeno hebrejské abecedy.

(0,1) je reálných čísel nekonečně mnoho, nýbrž bychom jimi mohli zaplnit celou číselnou osu. Množina všech bodů na přímce je krásná ukázka jedné nespočetné množiny. Stejně jako bodů na přímce je i bodů na úsečce, ve čtverci, ba i v každém trojrozměrném útvaru; obecně lze prohlásit, že každý geometrický útvar, který má alespoň jednu čáru, obsahuje stejný počet bodů. Velikost těchto útvarů se nazývá mohutnost kontinua[15] a značí se *c* (gotické c). Uveďme si na malém příkladu, jak lze každému bodu jedné úsečky přiřadit bod úsečky jiné *(viz Obrázek č. 2)*.

Je zřetelně vidět, že libovolnému bodu jednoho útvaru odpovídá přesně jeden bod útvaru druhého, všechny jejich body lze mezi sebou jednoznačně přiřadit a opravdu mají stejně mnoho bodů. Skutečnost, že je ve čtverci stejně bodů jako na úsečce nás bude pravděpodobně trochu mást, nicméně ani tak není pravda, že by všechny nespočetné množiny byly stejně velké.

### 3.2.4. Cantorova diagonální metoda

Sám Cantor pro důkaz tvrzení, že je nekonečná množina reálných čísel větší, než nekonečná množina všech čísel přirozených, použil takzvanou *diagonální metodu*. Tento postup spočívá v následujícím:

Vezměme si opět interval od 0 do 1. Nyní si představme, že jsme seřadili všechna čísla, která se v tomto intervalu nacházejí v jakémkoliv pořadí, kupř.: *a = 0,02574…; b = 0,21859…; c = 0,45089…; d = 0,24815…; e = 0,96314…;* atd. Nejspíš teď vypadá, že jsme nějakým způsobem sepsali a uskupili opravdu všechna. Zkusme ale sestrojit číslo *A*, které v naší řadě určitě není. Postupně se podíváme na všechna námi zapsaná čísla.

a = 0,**0**2574…
b = 0,2**1**859…
c = 0,45**0**89…
d = 0,248**1**5…
e = 0,9631**4**…
atd.

*A* nesmí být stejné s číslem *a*, tedy pokud má *a* na prvním desetinném místě 0, zapíšeme si 1; zatím tedy *A = 0,1*. Obecně budeme zapisovat vždy 1, pouze pokud by na n-tém místě původního čísla byla 1, zapíšeme si 0. *A* se také musí lišit od *b*, tedy pokud má *b* na druhém desetinném místě 1, zapíšeme si 0; *A = 0,10*. Číslo *c* má ale na třetím místě 0, zaznamenáme si tedy 1; nyní *A = 0,101*. Aby se naše *A* lišilo od *d*, musíme si zapsat 0; *A = 0,1010*. Teď už určitě

[15] Z lat. continuum = spojité.

odhadneme, že na další pozici bude zase 1. Kdybychom obdobným způsobem pokračovali až donekonečna, dostali bychom číslo *A*, které je rozdílné od všech našich doposud zapsaných čísel alespoň v jedné číslici. Stejně tak by šlo jenom v intervalu 0,1 sestrojit nekonečno dalších čísel, které se vzájemně liší.

### 3.2.5. Mohutnost množiny a kardinální číslo

Jak jsme již společně zjistili, Cantor ve své práci zavedl několik nadále používaných a významných pojmů. Dalším z nich, o kterém budeme hovořit, je *mohutnost množiny*. Mohutnost množiny si můžeme nejjednodušeji představit jako její velikost. Pokud se nám podaří k sobě prvky obou množin jednoznačně přiřadit (což jsme právě u několika z předchozích zvládli), prohlašujeme je za ekvivalentní, to znamená, že mají stejný počet prvků. A abychom od sebe mohli množiny s rozdílnou mohutností jednoduše odlišit, prohlásíme, že pokud mají dvě množiny stejnou mohutnost, přiřadíme jim i stejné kardinální číslo (neboli kardinál).

U konečných množin je to jednoduché. V případě, že dvě konečné množiny mají stejně mnoho prvků, (existuje mezi nimi vzájemně jednoznačné přiřazení), říkáme že, je jejich mohutnost stejná. Obecně platí, že konečným množinám přiřazujeme kardinální číslo podle počtu jejich prvků, kupříkladu množina o pěti prvcích bude mít kardinál 5. Trochu složitější situace je potom u množin nekonečných. Dvě nekonečné množiny mají stejnou mohutnost a shodné kardinální číslo, právě pokud mezi nimi existuje vzájemné jednoznačné přiřazení, čili pokud jsou si ekvivalentní. V předchozích odstavcích jsme hovořili o množinách, které se nám podaří očíslovat pomocí všech přirozených čísel. Řekli jsme si, že všechny tyto množiny jsou stejně velké. Od této chvíle budeme hovořit o stejné mohutnosti. Mohutnost spočetné množiny je ze všech nekonečných mohutností nejmenší.

Právě Cantor ve své práci přišel s velice zajímavou větou, která popisuje, jak sestrojit množinu s větší mohutností, než je mohutnost předchozí. My si ji vyložme takto: „*A*, *B* jsou dvě libovolné neprázdné množiny, přičemž množina *B* obsahuje alespoň dva různé prvky. Pak množina *Z* všech zobrazení *A* do *B* má větší mohutnost než množina *A*.“. Pro jednoduchou představu se nejprve podívejme na tento obrázek *(viz Obrázek č. 3)*.

Je zde množina *A*, která obsahuje tři prvky (počítejme kardinální číslo 3) a množina *B*, která má prvky dva (kardinál 2). Na obrázku vidíme osm možných přiřazení prvků množiny *A* k prvkům množiny *B* (kardinál této množiny je 8[16]).

Stejně tak množina všech podmnožin[17] libovolné (neprázdné) množiny má větší mohutnost než množina *A*. Podívejme se opět na *A*, která má pouze tři prvky *(A = {1, 2, 3}).* Když vypíšeme všechny její podmnožiny *({}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3})*, vidíme, že nová množina má znovu větší mohutnost, než množina předcházející[18]. Taková množina se nazývá potenční a značí se *P(M)*, přičemž *M* je původní množina. Toto tvrzení se obecně nazývá *Cantorova věta*.

Dnes už také víme, že má každá mohutnost svého bezprostředního následovatele. Z napsaného rovněž vyplývá, že neexistuje množina, jejíž mohutnost by byla ze všech největší. Pokaždé se nám podaří nalézt množinu, která bude mít mohutnost větší, než množina předchozí.

Docházíme tedy k otázce, zda mohutnost (značená $\aleph_1$), která následuje těsně za mohutností přirozených čísel ($\aleph_0$), je právě mohutnost všech možných podmnožin této množiny.

### 3.2.6. Hypotéza kontinua[19]

Poté, co přišel Cantor s důkazem, že existují různě velká nekonečna, začal se zabývat záludnou otázkou. Je nekonečná množina, jejíž mohutnost leží přesně mezi mohutností přirozených a mohutností reálných čísel? Jinak řečeno, zdali má mohutnost množiny, kterou označujeme jako $\aleph_1$ (množina všech podmnožin přirozených čísel) mohutnost kontinua. Sám Cantor předpokládal, že jsou si obě mohutnosti ekvivalentní, ale nebyl schopen svou úvahu dokázat. Tento problém se nazývá *hypotéza kontinua* a dnes již víme, že se nedá v teorii množin, kterou používáme, ani vyvrátit, ani dokázat.

---

[16] Pro zajímavost: $8 = 2^3$. Opravdu platí, že výslednou mohutnost všech zobrazení *A* do *B*, kde *a* je počet prvků v *A* a *b* je počet prvků v *B*, spočítáme jako $b^a$.

[17] Jinak řečeno množina všech funkcí definovaných na dané množině.

[18] Skutečnost, že mohutnosti v obou příkladech vyšly stejně, je čistě náhodná (mohutnost druhé množiny bychom určili jako $2^a$).

[19] Kontinuum; podle názvu mohutnosti reálných čísel.

## 3.3. Závěr plynoucí z Cantorovy práce

Cantor se ve svém rozsáhlém díle zabýval mnoha vlastnostmi množin. Na rozdíl od jiných vědců se nenechal odradit a postupně dospěl k počítání s nekonečnými veličinami; jeho pohled se obrátil i k hypotéze kontinua. Zanechal nám po sobě důležité pojmy, jako je kupříkladu mohutnost a kardinální či ordinální číslo.

I přes některé zmínky a náznaky v dílech předcházejících autorů, považujeme Cantora právoplatně za zakladatele teorie množin. Nazýváme ji naivní (nebo intuitivní) právě proto, že nebyla vybudována přesně a axiomaticky. Cantorova teorie množin se zjednodušeně podobá té, která se v současnosti učí na středních školách a jako taková by jistě skvěle postačila pro základní množinové operace. Ani skutečnost, že byla Cantorova teorie později axiomatizována a nahrazena jinými, neznamená, že bychom její důsledky měli brát na lehkou váhu.

Byť bylo proti Cantorově naivní teorii od začátku vznášeno mnoho výhrad, celý systém fungoval až do chvíle, kdy v něm byly objeveny první antinomie.

# 4. Antinomie teorie množin

*Nic není objeveno a zároveň hned dokonalé.*

*Marcus Tullius Cicero* [14]

## 4.1. Úvod aneb proč používat pojem antinomie

Cantorův intuitivní přístup k teorii množin fungoval až do okamžiku, kdy se vědci začali zabývat příliš velkými celky, jako jsou množina všech množin apod. Období, kdy se postupně začalo zdát, že naivní teorie množin není bezchybná, je souhrnně nazýváno třetí krize matematiky. Pro čtenářovu představu první krize nastala přibližně v 5. stol. př. n. l. s objevem iracionálních čísel a Zenonových aporií, druhá potom při snaze o počítání s nekonečně malými veličinami.

Antinomií rozumíme rozpor dvou výroků, které byly zdánlivě dokázány, ale jsou přitom neslučitelné, vedou ke sporu. Tyto spory jsou často nazývány *paradoxy*, nicméně označení paradox není pro dané účely zcela přesné a výstižné. Slovem paradox označujeme totiž neočekávané tvrzení, jež zdánlivě nedává smysl, správný úsudek, jehož výsledkem je logický spor. V naivní teorii množin jich byla postupně nalezena celá řada, já ve své práci popisuji pouze několik nejznámějších a nejdůležitějších.

#### 4.1.1. Russellova antinomie (paradox holiče)

Na úvod si přečtěme krátký příběh.

*Jednoho dne se v městečku usídlil velice podivný holič. Již první ráno jeho kariéry se na dveřích malého krámku objevil krátký nápis: „Oholím každého, kdo se neholí sám, a nikoho jiného.“. Celý den holiči jeho nadšení vydrželo, až do okamžiku, kdy se postavil před své vlastní zrcadlo. Vytáhnul ze šuplíku žiletku a přiložil si ji k obličeji. Pak mu ale hlavou probleskla krátká myšlenka. V případě, že se nyní oholí, bude muset ceduli na vitríně sundat, to je jasné, přece nebude zákazníkům lhát. Pokud ale žiletku nepoužije, logicky by se oholit měl.*

Antinomie, se kterou jsme se nyní seznámili, se nazývá Russellova. Bertrand Russell byl britský logik, filozof a matematik, který je známý mimo jiné díky spisu „Principia Mathematica“, který napsal společně s Alfredem North Whiteheadem a za objevení této antinomie v naivní teorii množin.

V Russellově antinomii je stěžejní pojem *množina všech množin, které nejsou svým vlastním prvkem*. V případě, že tato množina svým vlastním prvkem je, docházíme ke sporu; nicméně v případě, že není, také. Paradox holiče je ze všech antinomií naivní teorie množin nejznámější, autor jej publikoval v roce 1903. Stejný rozpor intuitivní teorie množin objevil nezávisle na Russellovi německý matematik Ernst Zermelo.

#### 4.1.2. Cantorova antinomie

Dalším z paradoxů naivní teorie množin je antinomie objevená roku 1899 Georgem Cantorem. Mějme množinu všech množin M, tedy množinu, které náleží jakákoliv jiná množina. Cantorova věta *(viz 3.2.5.)* říká, že má potenční množina *P(M)* větší mohutnost než původní množina *M*. V případě, že je potenční množina *P(M)* větší než množina všech množin *M*, musí existovat prvky, které množina *M* neobsahuje. Tady je ale vidět zřejmý spor.

#### 4.1.3. Richardova antinomie

Roku 1905 francouzský matematik Jules Richard využil Cantorovu diagonální metodu a předložil nám následující paradox. „Některá reálná čísla můžeme definovat pomocí konečné posloupnosti českých slov. Všech českých slov je konečně mnoho, tedy i množina všech konečných posloupností českých slov je spočetná, stejně jako množina *M* všech reálných čísel, které můžeme pomocí těchto slov definovat. Vzhledem k tomu, že je množina *M* těchto slov spočetná, jistě ji lze seřadit. Nyní sestrojíme pomocí diagonální metody *(viz 3.2.4.)* číslo *A*, které množině *M* nenáleží. Z definice množiny *M* ale plyne, že číslo *A* nelze definovat žádnou konečnou posloupností českých slov, což je spor (právě se nám jej definovat podařilo).“.[15]

#### 4.1.4. Antinomie Berryho

Antinomii Berryho můžeme chápat spíše jako pouhé zjednodušení antinomie Richardovi. Interpretujeme si ji takto: „Všech českých vět o maximálně dvaceti slovech je konečně mnoho. Z toho vyplývá, že musí existovat přirozená čísla, která pomocí takové věty definovat nelze.

Mějme větu „Budiž *k* nejmenší přirozené číslo, jež nelze definovat žádnou českou větou o nejvýše dvaceti slovech.“ Tato věta definuje číslo, které žádnou větou o méně než dvaceti slovech definovat nelze, došli jsme tedy ke sporu.“.[16]

Richardovu a Berryho antinomii řadíme mezi tzv. antinomie sémantické[20]. K jejímu řešení, stejně jako u antinomie Berryho, dopomohlo oddělení jazyka, v němž jsou tyto teorie budovány (tzv. objektový jazyk), od jazyka užívaného k popisu tohoto jazyka (tzv. metajazyk).

## 4.2. Co z antinomií vyplynulo

Tento krátký výčet antinomií samozřejmě nezahrnuje všechny, které byly postupně v naivní teorii množin odhaleny, ale spíše se čtenáře pokouší uvést do stavu, který objevením antinomií postupně nastal. A právě proto se touto dobou dosavadní snaha matematiků obrátila k hledání řešení nastolené situace.

[20] Sémantický = významový.

# 5. Řešení situace

*Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, který pro nás vybudoval Cantor.*

*David Hilbert* [17]

## 5.1. Úvod

Původně se rozpory v naivní teorii množin sváděly na příliš velké objekty, jako jsou *množina všech množin* a podobně. Postupně se ale ukázalo, že bude nutno Cantorovu intuitivní teorii množin přinejmenším opravit nebo se pokoušet najít jinou, bezchybnější cestu. Různí lidé nabízeli různá řešení, z nichž nakonec vyšlo několik obecných východisek.

### 5.1.1. Intuicionistický přístup[21]

Prvním z nich se stal přístup intuicionistický. Ten tvrdí, že teorie množin byla doposud budována nepřípustnými metodami, tedy že je velká část dosavadní matematiky nesprávná. Intuicionisti se vrací o pár kroků zpátky a ve svých teoriích překvapivě odmítají aktuální nekonečno. Problémem pro ně samozřejmě zůstala skutečnost, že museli vše začít budovat znovu od základů.

### 5.1.2. Formalistický přístup[22]

Druhým směrem se odebrali formalisti. Jedním z jejich řešení se stala axiomatická výstavba teorie množin, která bývá v současnosti všeobecně uznávána jako jedno platné východisko. Dalším z důsledků formalistické teorie byla formalizace jazyka teorie množin, jež dala popud ke vzniku metamatematiky. Formalistická výstavba je založena na převedení všech tvrzení

[21] Intuice = tušení, vytušení, schopnost postihnout.

[22] Formalismus = ulpívání na formální stránce věci (vyhovující požadavkům a předpisům) bez zřetele k vnitřnímu obsahu nebo dopadu.

do posloupností přesně daných symbolů a zavedení ustálených pravidel. Druhým předmětem práce formalistů byla Russellova teorie typů. Bertrand Russell tvrdí, že příčina vzniku antinomií byla taková, že byl doposud pomocí prvků jednoho systému definován opět prvek systému stejného.

### 5.1.3. Axiomatizace teorie množin

Axiomatizací rozumíme způsob výstavby vědeckého systému, který poprvé zavedl Eukleides ve svých „Základech". Při axiomatizaci vzniká množina základních, v daném systému nedokazovaných vět, respektive axiomů, z nichž se odvozují ostatní tvrzení. Nejdůležitější požadavky, které se na axiomatizovaný systém kladou, jsou zejména nezávislost, tedy žádný axiom nelze vyvodit ze zbývajících, úplnost, každé tvrzení lze v tomto systému dokázat nebo vyvrátit a bezespornost, z axiomů nelze vyvodit tvrzení a zároveň jeho negaci. Až později rakouský matematik Kurt Gödel dokázal, že nelze sestavit takovou teorii množin, která by splňovala všechny tyto tři body[23].

### 5.1.4. Zermelo-Fraenkelův axiomatický systém

První axiomatickou teorii vytvořil v letech 1904–1908 německý matematik Ernst Zermelo. Nazývá se Zermelo-Fraenkelova (používaná zkratka je ZM), jelikož byla později upravena izraelským matematikem Abrahamem A. Fraenkelem. Základní odlišnost od Cantorovy teorie je předpoklad, že každý soubor objektů netvoří množinu, tedy nelze volně operovat se všemi systémy, například množina všech množin, jak tomu bylo u Cantora. Základními a nedefinovatelnými pojmy jsou v této teorii *množina* a znak náležení „$\in$". Systém dále zahrnuje řadu nedokazatelných tvrzení, tedy axiomů, na kterých se postupně buduje. Dnes, i přes to, že se v matematice častěji používají jiné podobné teorie, je ZM velice známá, už jenom proto, že se jednu její obdobu učí všichni žáci středních škol. Každý přece zná malá písmena latinské abecedy, symbol náležení, logické spojky, kvantifikátory, závorky atd.

### 5.1.5. Gödel-Bernaysova teorie tříd

Postupně se axiomatizací teorie množin začalo zabývat mnoho matematiků. My si zde kromě ZM uvedeme pouze jeden další systém, a to Gödel-Bernaysovu teorii tříd (označována GB).

[23] Gödelovy věty o neúplnosti.

Tato teorie je poměrně podobná ZM, nicméně základním stavebním pojmem zde není *množina*, nýbrž *třída*, termín o něco obecnější. Každá množina je totiž zároveň třídou, naopak ale ne. Třída, která není množinou, se nazývá *vlastní třída*. Všechny ostatní třídy, které jsou zároveň prvky třídy jiné, jsou množinami. Zavedením tříd se tedy zamezilo pojmům, jako je množina všech množin apod., tedy i z toho plynoucích nesrovnalostí.

### 5.1.6. Axiom výběru

Cílem mé práce není sepsat všechny axiomy, které se v teorii množin používají, ale chtěla bych se zmínit o jednom, který je často uváděn, zejména pro nesrovnalosti plynoucí z jeho přijetí. Poprvé axiom výběru formuloval Ernst Zermelo roku 1904 v důkazu tvrzení, že lze každou množinu dobře uspořádat. Axiom můžeme vyjádřit takto: „Mějme libovolný neprázdný soubor neprázdných množin. Pak lze z každé množiny tohoto systému vybrat jeden prvek.“ Jak vidíme, axiom zajišťuje, že k libovolnému systému neprázdných množin existuje množina, která má s každou z těchto množin jednoprvkový průnik[18]. Postupem času byly proti němu vzneseny četné výhrady, převážně proto, že se v případě přijetí axiomu výběru objevila velice podivná tvrzení. Dnes se axiom většinou používá pouze v případech k tomu nezbytných a jeho užití se výslovně uvádí.

## 5.2. Dodnes nepřekonaná krize

Shrnutí východisek z nastalé krize, které ve své práci uvádím je spíše ilustrující a nepodrobné. Ač mnoho matematiků nabízelo různé druhy řešení, třetí krize matematiky, kterou se jejich východiska pokouší ukončit, však nebyla dodnes plně překonána. Avšak jak se říká: „Nic není dokonalé.“, že?

# 6. Závěr

Roku 1851 spatřilo svět první vydání knihy „Paradoxy nekonečna“. Od této doby postupně začala vznikat teorie množin, která za dobu své existence zaznamenala mnoho změn. Byť se její počátky datují do 19. století, neustále se rozvíjí a její vývoj není zdaleka u konce.

Ve své práci se mi podařilo zmapovat počátky historie teorie množin. Mým cílem nebylo precizně definovat její výstavbu, nýbrž poutavou formou sepsat základní poznatky zabývající se historickými aspekty ve vývoji a vývojem teorie množin. Možné rozšíření práce vidím v navázání na poslední kapitolu a pokračování v historii teorie množin, kupříkladu o Gödelovy věty o neúplnosti, nebo případně v rozšíření Cantorovy práce, antinomií a řešení krize.

Moje středoškolská odborná činnost stojí na pomezí několika oborů, a to zejména matematiky, filosofie a dějepisu. Zde bych velice ráda vysvětlila, proč jsem svou práci zařadila právě do oboru č. 17: filozofie, politologie a ostatní humanitní a společenskovědní obory. Byť se zabývá historickou částí matematiky, právě filosofie stála u jejího vzniku, tedy období, kterému se ve své práci věnuji. Uvádím zde proto definici filosofie, kterou ve svém díle použil český filosof 19. století, Josef Durdík: „Filosofie je věda, která na základě výsledků ostatních věd celkový obraz světa sestrojiti hledí.“[24][19]

Na tomto místě bych ráda zhodnotila zdroje, které jsem ve své práci používala. Z hlediska metod to byla zejména práce s odbornou literaturou, a to převážně s publikacemi určenými pro vysokoškolské studium, dále internetovými zdroji, odbornými publikacemi a jejich kompilace. Ač nerada, musím prohlásit, že pro člověka, jako jsem já, není mnoho zdrojů, které by ke své práci mohl použít, zejména v některých jejích částech.

Závěrem bych chtěla poděkovat Vám všem, kteří jste se ve svém čtení dostali až k těmto řádkům, za pozornost kterou jste mé práci věnovali. Doufám, že pro čtenáře nebyla pouhým svazkem několika papírů, nýbrž podnětnou prací, která bude alespoň některým z Vás užitečná.

[24] Cíleně jsem nepoužila novodobou definici, nýbrž takovou, která je z doby blízké Bernardu Bolzanovi.

# Seznam informačních zdrojů

## a) Literatura

[1] BERKA, Karel. *Bernard Bolzano*. 1. vyd. Praha: Horizont, 1981.

[2] BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna*. Přeložil prof. dr. O. Zich. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie věd, 1963.

[3] DURDÍK, Josef. *Dějepisný nástin filosofie novověké*. Praha, 1878. Str. 4.

[4] FUCHS, Eduard. *Teorie množin*. 1. dotisk, Brno: Universita J.E. Purkyně v Brně. Přírodovědecká fakulta, 1974.

[5] FUCHS, Eduard. *Teorie množin pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2201-9.

[6] KOPECKÝ, Milan. *Úvod do teorie množin*. 1. vyd. Olomouc: Polygrafické středisko VUP Olomouc, 1996.

[7] PÉTEROVÁ, Rózsa. *Hra s nekonečnem: (matematika pro nematematiky)*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1973.

[8] VILENKIN, Naum Jakovlevič. *Neznámý svět nekonečných množin*. Přeloženo z ruštiny 1. vyd. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1971.

[9] VILENKIN, Naum Jakovlevič. *Vyprávění o množinách*. Přeložil dr. Milan Vlach. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973.

## b) Internetové zdroje

[10] DAŇHEL, Milan. *František Příhoňský* [online]. c1998, [cit. 2011-12-22]. <http://www.phil.muni.cz/fil/scf/komplet/prihon.html>.

[11] KRATOCHVÍL, Zdeněk. *Zénón Elejský A* [online]. Univerzita Karlova v Praze. Poslední aktualizace 17.2.2012 [cit. 2012-02-19]. <http://www.fysis.cz/presokratici/zenon/acz.htm#A 27>.

[12] KUČERA, Radek. *ABZ.cz: slovník cizích slov* [online]. c2005-2006, [cit. 2012-02-01]. <http://slovnik-cizich-slov.abz.cz/>.

[13] SVOBODA, Tomáš. *Georg Wilhelm Friedrich Hegel* [online]. [cit. 2011-11-24]. <http://filosofie.kvalitne.cz/hegel.htm>.

[14] VÍT, Martin. *Citáty* [online]. c1995-2011, poslední změna 19.2.2012 [cit. 2012-02-19]. <http://slovnik.cz/docs/citaty.html>.

[15] *Vidím to, ale sám tomu nevěřím* [online]. c2009-2011 [cit. 2012-02-19]. <http://azcitaty.cz/georg-cantor/32784/>.

[16] VLACHOVÁ, Magda. *David Hilbert* [online]. Poslední revize 23.2.2009, [cit. 2011-12-20]. <http://vedci.wz.cz/Osobnosti/Hilbert_D.htm>.

[17] VLACHOVÁ, Magda. *Techmania - Edutorium* [online]. c2008, vytvořeno 1.3.2010 [cit. 2011-11-18]. <http://www.techmania.cz/edutorium/clanky.php?key=726>.

**c) Elektronická monografie**

[18] HYKŠOVÁ, Magdalena. *Teorie množin* [online], vytvořeno 17.12.2010 [cit. 2011-12-03]. <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/matematika/historie/files/prednaska_mnoziny.pdf>.

[19] SAXL, Ivan. *Matematika v proměnách věků. III: Filosofické interpretace pravděpodobnosti* [online]. poslední revize 19.8.2011, [cit. 2011-11-25]. <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401599/DejinyMat_24-2004-1_11.pdf>.

# Seznam citací

[1] VILENKIN, Naum Jakovlevič. *Vyprávění o množinách*. Přeložil dr. Milan Vlach. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. Str. 2.

[2] Zlomek A27 DK. Přeložil KRATOCHVÍL, Zdeněk. *Zénón Elejský A* [online]. Univerzita Karlova v Praze. Poslední aktualizace 17.2.2012 [cit. 2012-02-19]. A 27 /1 = Aristotelés, Physica 239b30, A 27 /2 = Aristotelés, Physica 239b5. <http://www.fysis.cz/presokratici/zenon/acz.htm#A 27>.

[3] VILENKIN, Naum Jakovlevič. *Vyprávění o množinách*. Přeložil dr. Milan Vlach. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1973. Kapitola 2, Ve světě zázraků nekonečna: Tajemství nekonečna, str. 65.

[4] BERKA, Karel. *Bernard Bolzano*. 1. vyd. Praha: Horizont, 1981. Poslední léta života, str. 41.

[5] BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna*. Přeložil prof. dr. O. Zich. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie věd, 1963. Předmluva k českému vydání, str. 5.

[6] DAŇHEL, Milan. *František Příhoňský* [online]. c1998, [cit. 2011-12-22]. <http://www.phil.muni.cz/fil/scf/komplet/prihon.html>.

[7] SVOBODA, Tomáš. *Georg Wilhelm Friedrich Hegel* [online]. [cit. 2011-11-24]. <http://filosofie.kvalitne.cz/hegel.htm>.

[8] VLACHOVÁ, Magda. *Techmania - Edutorium* [online]. c2008, vytvořeno 1.3.2010 [cit. 2011-11-18]. <http://www.techmania.cz/edutorium/clanky.php?key=726>.

[9] KOPECKÝ, Milan. *Úvod do teorie množin*. 1. vyd. Olomouc: Polygrafické středisko VUP Olomouc, 1996. Kapitola 11. Historické aspekty, str. 91.

[10] BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna*. Přeložil prof. dr. O. Zich. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie věd, 1963. Poznámky § 8.

[11] BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna*. Přeložil prof. dr. O. Zich. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie věd, 1963. Předmluva k českému vydání, str. 7.

[12] *Vidím to, ale sám tomu nevěřím* [online]. c2009-2011 [cit. 2012-02-19]. <http://azcitaty.cz/georg-cantor/32784/>.

[13] FUCHS, Eduard. *Teorie množin*. 1. dotisk, Brno: Universita J.E. Purkyně v Brně. Přírodovědecká fakulta, 1974. Kapitola 1, Základní pojmy teorie množin: 1. Množiny, str. 5.

[14] VÍT, Martin. *Citáty* [online]. c1995-2011, poslední změna 19.2.2012 [cit. 2012-02-19]. <http://slovnik.cz/docs/citaty.html>.

[15] FUCHS, Eduard. *Teorie množin pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2201-9. Kapitola IV. Historický vývoj teorie množin, 3. Antinomie teorie množin. Třetí krize matematiky, str. 131.

[16] KOPECKÝ, Milan. *Úvod do teorie množin*. 1. vyd. Olomouc: Polygrafické středisko VUP Olomouc, 1996. Kapitola 11. Historické aspekty, str. 93.

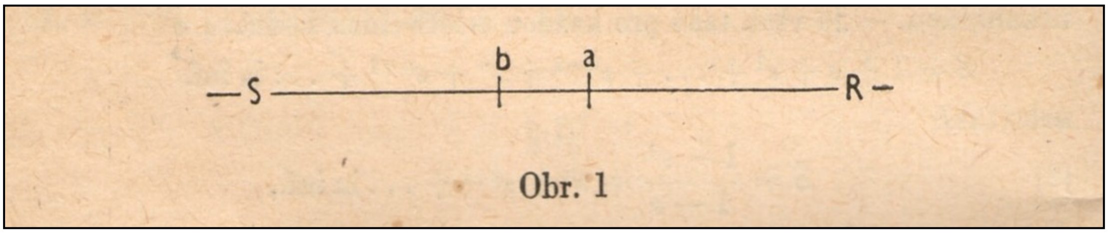
[17] FUCHS, Eduard. *Teorie množin pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2201-9. Kapitola IV. Historický vývoj teorie množin, 3. Antinomie teorie množin. Třetí krize matematiky, str. 132.

[18] KOPECKÝ, Milan. *Úvod do teorie množin*. 1. vyd. Olomouc: Polygrafické středisko VUP Olomouc, 1996. Kapitola 11. Historické aspekty, str. 94.

[19] DURDÍK, Josef. *Dějepisný nástin filosofie novověké*. Praha, 1878. Str. 4.

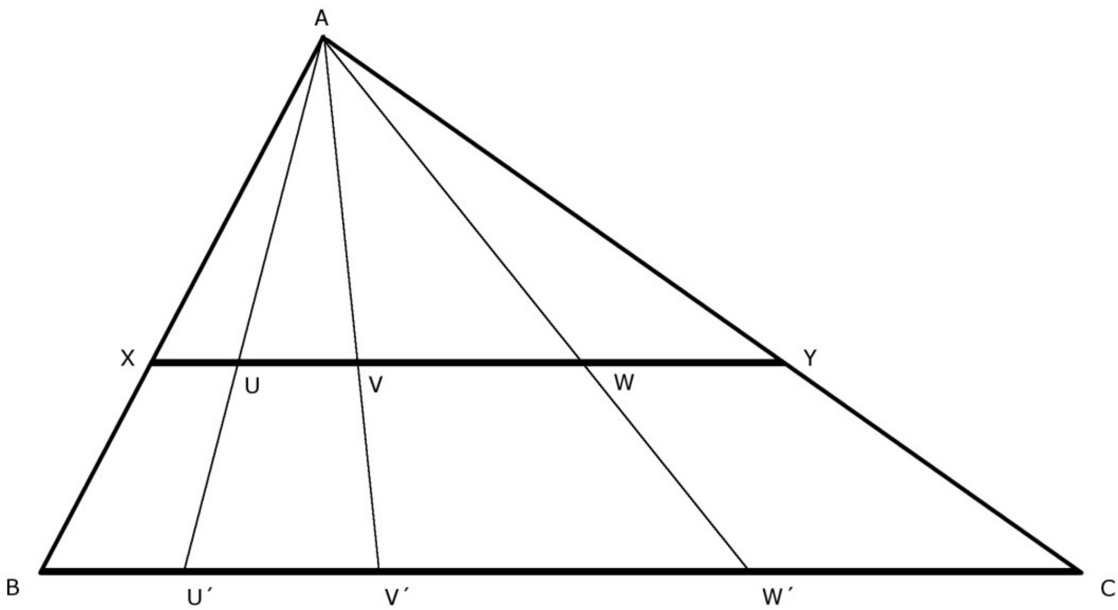
# Seznam obrázků

*Obrázek č. 1*: Bernard Bolzano, různě velká nekonečna.



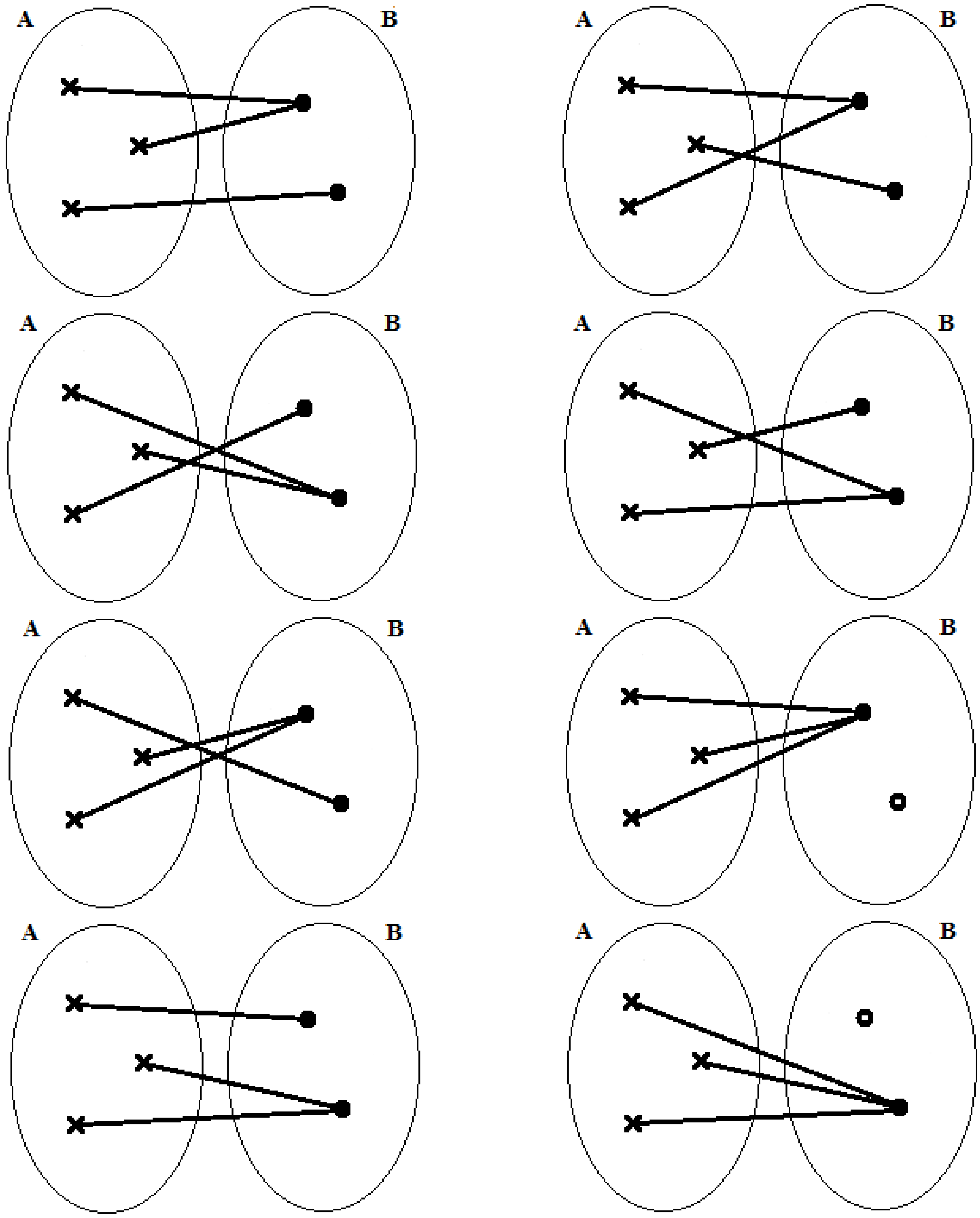

*Zdroj:* BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna*. Přeložil prof. dr. O. Zich. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé Akademie věd, 1963. Paragraf § 19, str. 34.

*Obrázek č. 2*: Přiřazení bodů *U, V, W* úsečky XY bodům *U´, V´, W´* úsečky BC.




*Pozn.*: obrázek je vytvořen autorkou.

*Obrázek č. 3:* Množina *Z* všech zobrazení množiny *A* do množiny *B*.




*Pozn.*: obrázek je vytvořen autorkou.