Středoškolská technika 2016

Setkání a prezentace prací středoškolských studentů na ČVUT

TVAR HLADINY KAPALINY U STĚNY NÁDOBY

Radek Jizba, Matěj Kukla

Gymnázium Jiřího z Poděbrad
Studentská 166/II, Poděbrady

Anotace:

Tato práce se zabývá tvarem hladiny kapaliny u stěny nádoby, která je jí smáčena. Při praktickém experimentu byla hladina kapaliny nasnímána pomocí USB mikroskopu, fotografie přenesena do programu Cabri Geometrie a zde matematicky analyzována.
V práci je ověřen předpoklad, že zakřivení hladiny u stěny nádoby je právě takové, aby se tlak kapilární v každém jejím bodě rovnal tlaku hydrostatickému. Z této rovnosti je pak odvozena a numericky řešena diferenciální rovnice, jejíž řešení toto zakřivení popisuje. Nakonec se dokládá, že výsledky měření a matematicky model vykazují velmi dobrou shodu.

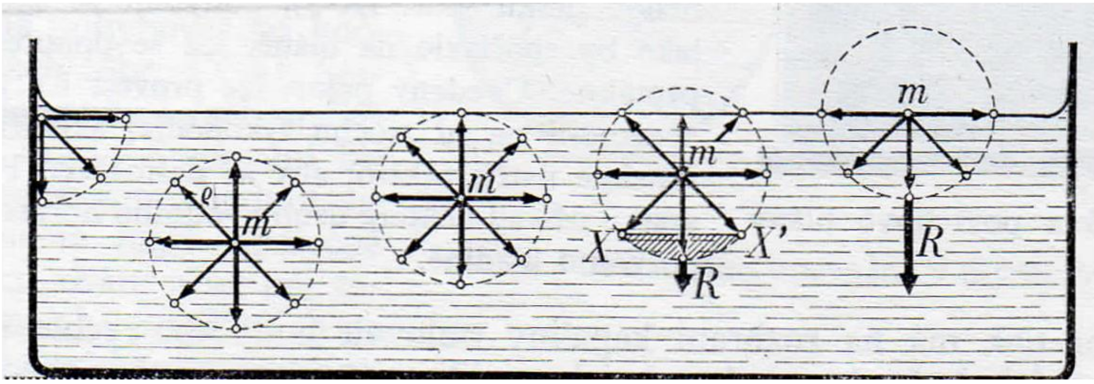
Klíčová slova:

Kapilarita, kapilární elevace, kapilární deprese, povrchové napětí, kapilární tlak, hydrostatický tlak, smáčivost, USB mikroskop

Obsah

1. Povrchová vrstva kapaliny

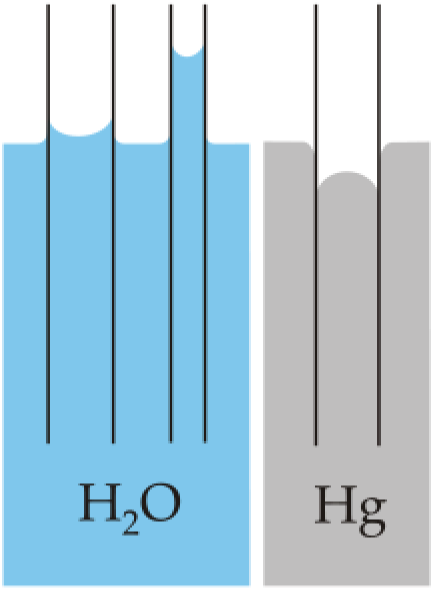
Podle Laplaceovy teorie každá molekula (v našem případě vody) působí na ostatní okolo sebe přitažlivými silami. Vodní hladina má tendenci zůstat v klidu, neboť na rozmezí kapaliny a plynu jsou velké rozdíly v hustotě molekul. Molekuly vody jsou přitahovány směrem do středu kapaliny, protože vzdálenosti mezi molekulami kapaliny jsou mnohem menší než vzdálenosti molekul v plynech. Díky tomu výsledný vektor přitažlivosti působící na molekulu vede směrem do kapaliny (od molekulárně řidší látky, v našem případě plynu). Na obrázku **m** zastupuje molekulu, **R** směr vektor síly působící na molekulu **m**.



Když budeme mít k dispozici dostatečně velkou vodní hladinu, lze pozorovat téměř dokonale rovnou plochu. Pokud se ale přiblížíme k okraji, odhalíme další pozoruhodnou vlastnost kapaliny nazvanou smáčivost. To je vztah mezi kapalinou a pevnou látkou způsobující přichycování (smáčivost) či odpuzování (nesmáčivost) od sebe (zde je nutné upozornit na fakt, že nic jako odpuzování kapaliny od pevné látky neexistuje. V tomto kontextu byla pevná látka pouze použita jako náhrada faktu, že molekuly kapaliny jsou více přitahovány směrem do kapaliny).

Smáčivost způsobuje dva jevy: kapilární elevaci nebo kapilární depresi. Když se hladina přiblíží k stěně nádoby, tak utvoří kapilární elevaci, tzn. zakřiví se směrem nahoru (viz obrázek na následující straně). Tento jev vzniká v důsledku dvou jevů, a to povrchového napětí σ a smáčivosti kapaliny. Při spojení smáčivosti s povrchovým napětím kapaliny nám vznikne tlak, který byl nazván kapilární.

Další způsob, jak lze jednoduše pozorovat tento jev, je při vložení úzké trubičky tzv. kapiláry do kapaliny (jmenovitě vody). Následně pozorujeme, že v trubičce se hladina zdvihne výš, než je hladina klidné okolní kapaliny a vytvoří tvar prázdné kulové úseče. Toto je případ vody smáčivé kapaliny. Když budeme mít kapalinu nesmáčivou (např. rtuť), bude naopak hladinka uvnitř kapiláry níže než okolní hladina, ale stále bude mít tvar kulové úseče, i když tentokrát vyplněné.



Kapilarita je jev, který je způsoben tzv. povrchovým napětím. Jestliže na kapku jakékoliv kapaliny nebudou působit žádné vnější síly, zaujme tvar koule. Kapka či vodní hladina se totiž snaží získat takový tvar, aby měla co nejmenší povrch. Jestliže se ale budeme bavit i o kapilárním tlaku, musíme k této informaci přidat fakt, že při dotyku kapaliny s jiným (v našem případě pevným) tělesem, se kapalina zakřiví a projeví se takzvaná smáčivost. Pokud se zakřiví směrem nahoru, jedná se o kapilární elevaci, pokud směrem dolu, jde o kapilární depresi. Jev je velmi využíván například u vodních kluzáků či při rozličných vodních sportech. Bohužel se povrchové napětí vyskytuje i při automobilismu, při tzv. aquaplaningu.

2. Kapilární tlak

Každé zakřivení povrchu kapaliny se tedy projeví vznikem jakéhosi dodatečného tlaku, který se nazývá kapilární. Roku 1830 odvodil Carl Frierich Gauss tzv. Young-Laplaceovu rovnici, která který popisuje rozdíl kapilárních tlaků na rozhraní dvou statických kapalin.

V důsledku mechanické rovnováhy na zakřiveném fázovém rozhraní je rozdíl tlaků na konkávní (p^β) a konvexní (p^α) straně rozhraní funkcí zakřivení fázového rozhraní (R_1, R_2 jsou hlavní poloměry křivosti) a mezifázového povrchového napětí σ:

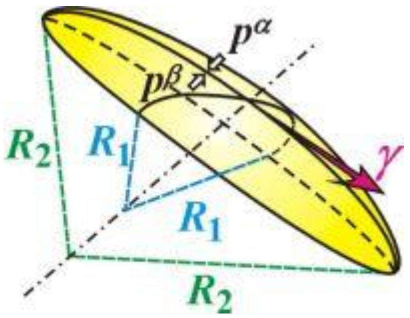
$$p^\beta - p^\alpha = f\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Pro kulové rozhraní, kdy $r = R_1 = R_2$, platí Young-Laplaceova rovnice:

$$p^\beta - p^\alpha = \frac{2\sigma}{r}$$

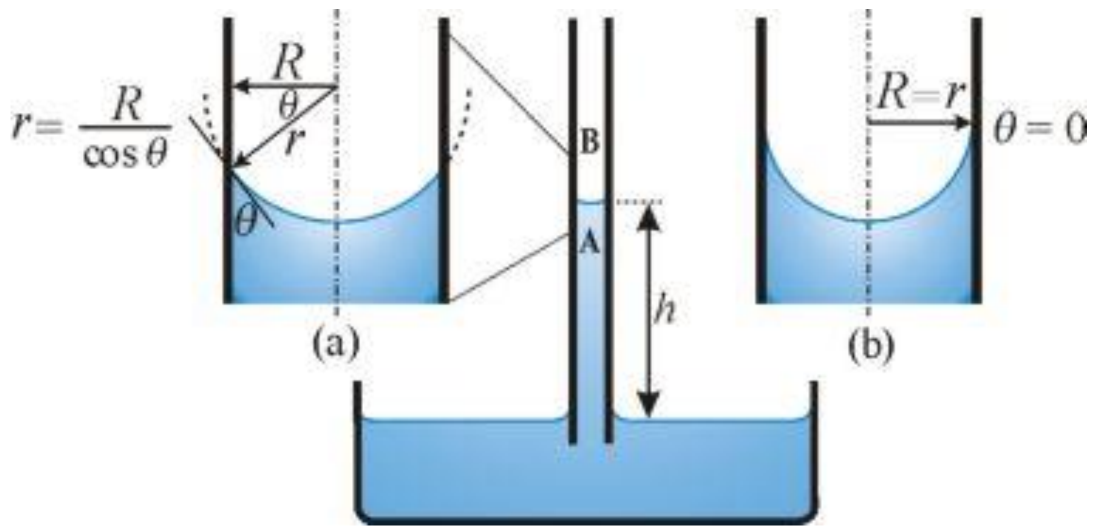
Pro válcové rozhraní, kdy $R_1 = r\ , R_2 = \infty$, platí, že:

$$p^{\beta} - p^{\alpha} = \frac{\sigma}{r}$$



3. Kapalina u stěny nádoby

Tvar kapaliny v kapilárách se obvykle znázorňuje ve tvaru dutého či vypuklého vrchlíku a u stěny nádoby jako část válcové plochy.

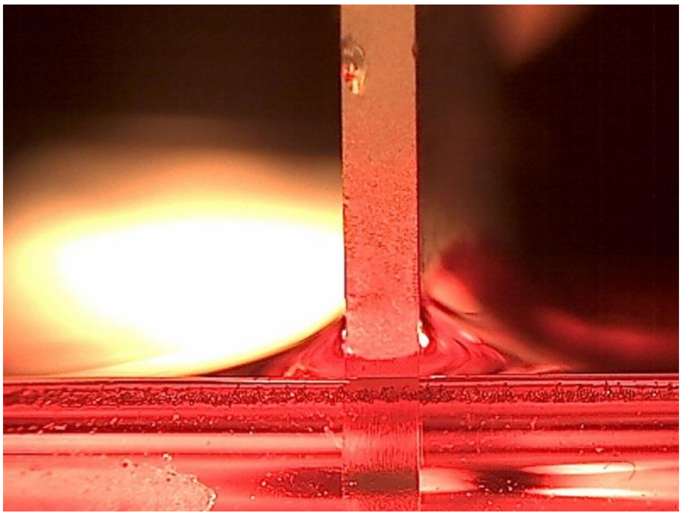


Tento tvar je samozřejmě chybný, protože povrchová vrstva ve tvaru kulového vrchlíku i válcové plochy, které mají konstantní poloměr křivosti, by ve všech svých bodech generovala konstantní kapilární tlak. V praxi však musíme uvažovat i hydrostatický tlak, který kulový vrchlík resp. válcovou plochu deformuje. Jednoduše řečeno: zatímco kapilární tlak „táhne“ kapalinu nahoru, tak hydrostatický tlak ji „táhne“ dolů. Aby tedy nastala rovnováha, tak hladina kapaliny v kapiláře, resp. u stěny nádoby, musí mít takový tvar, aby se v každém jejím bodě rovnal tlak hydrostatický tlaku kapilárnímu.

Křivost povrchu kapaliny tedy nemůže být konstantní jako u kulové nebo válcové plochy, ale musí se zvyšovat s rostoucí vzdáleností od její vodorovné hladiny. Neboli křivost hladiny kapaliny musí být největší v tom bodě, kde je i nejvyšší hydrostatický tlak, tzn. v tom bodě, v němž kapalina dosahuje největší výšky nad okolní vodorovnou hladinu.
Tuto svoji teorii „nestejné křivosti hladiny“ u stěny nádoby jsme se rozhodli ověřit tím, že hladinu vyfotografujeme a proměříme.

4. Praktické provedení experimentu

Do nádoby jsme nalili běžnou vodu obarvenou potravinářským barvivem a do ní zasunuli podložní sklíčko mikroskopu o tloušťce 1,08 mm, které představovalo stěnu nádoby. Kapilární elevaci jsme se nejdříve snažili vyfotografovat běžným fotografickým přístrojem, ale nebyli jsme úspěšní, protože z fotografií i při největším zvětšení nešlo o tvaru hladiny nic říci.
Úspěšní jsme byli až tehdy, když jsme použili USB mikroskop, který kromě velkého zvětšení (až 200 x) nám umožnil snímky přímo ukládat do počítače. Pomocí tohoto zařízení jsme již získali poměrně zdařilé snímky vodní hladiny.

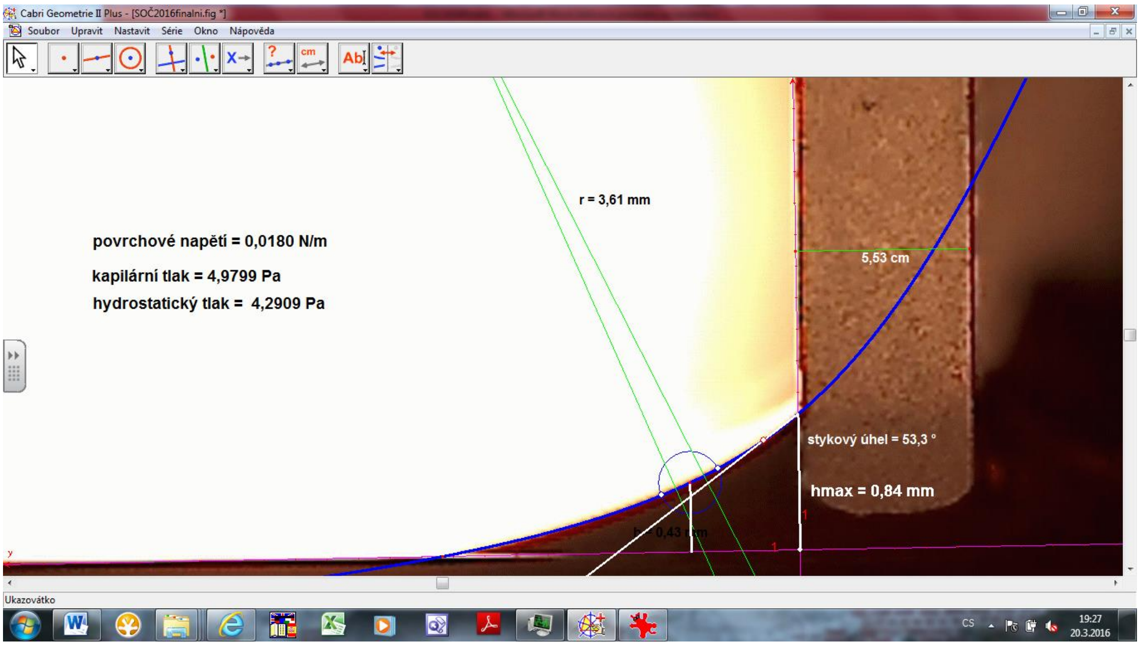


Z nich bylo již na první pohled patrné, že hladina poblíž sklíčka opravdu nemá tvar části válcové plochy konstantní křivosti, ale že se tato křivost mění podle výše zmíněného pravidla. Abychom tvar hladiny analyzovali, přenesli jsme tyto snímky jako pozadí do souboru programu Cabri Geometrie.

5. Analýza experimentálních dat

Program Cabri Geometrie je prostředí dynamické geometrie, která umožňuje pohodlné rýsování na počítači. My jsme kromě možnosti kreslení základních geometrických tvarů zvláště ocenili možnost proložení bodů křivkou, měření vzdáleností a matematické výpočty.

Pozadí tvořené naším snímkem jsme doplnili o další nutné geometrické objekty:



Pomocí nich jsme určili důležité hodnoty. Hladina u povrchu podložního sklíčka vystoupila do výše h = 0,84 mm a stykový úhel mezi povrchem sklíčka a tečnou k hladině v bodě, kde dosáhla své maximální výšky, byl asi 63°. Nyní jsme použili vztah pro výpočet stykového úhlu Θ:

$$\sin\Theta = 1 - \frac{\rho g h^2}{2\sigma}$$

ρ … hustota kapaliny
g … tíhové zrychlení
σ … povrchové napětí

Z něho jsme vyjádřili povrchové napětí:

$$\sigma = \frac{\rho g h^2}{2(1-\sin\Theta)}$$

Po dosazení konstant a námi určených hodnot ostatních veličin jsme zjistili, že povrchové napětí vody je 18 $\mathrm{mNm^{-1}}$, což je hodnota oproti tabulkové hodnotě 73 $\mathrm{mNm^{-1}}$ překvapivě nízká. Musíme si ovšem uvědomit, že tabulková hodnota platí pro destilovanou vodu a velmi čisté povrchy, zatímco my jsme pracovali s vodou běžnou a se zřejmě nepříliš čistým sklem fyzikálního kabinetu.
Abychom si určování křivosti hladiny usnadnili, proložili jsme hladinou matematicky definovanou křivku; hladině u stěny sklíčka nejlépe odpovídala elipsa, zatímco hladině ve větší vzdálenosti od sklíčka spíše hyperbola.
Na tuto křivku jsme umístili tři body, kterými jsme proložili kružnici. Určili jsme střed S této kružnice a její poloměr **r**, z níž program vypočetl kapilární tlak $\mathbf{p_K}$ podle vztahu:

$$p_k = \frac{\sigma}{r}$$

Následně jsme zjistili výšku **h** prostředního bodu této kružnice nad vodorovnou hladinu, načež jsme pomocí známého vztahu $p_h = \rho g h$ program přinutili, aby vypočetl tlak hydrostatický. Obě hodnoty si pak byly velmi blízké.
Nyní jsme prostřední červeně označený bod B kružnice táhli po křivce proložené hladinou, zatímco program kontinuálně počítal tlak kapilární a hydrostatický. Opět se prokazovala velmi dobrá shoda mezi nimi. Tím jsme dokázali, že hladina kapaliny u stěny nádoby má vždy takový tvar, aby se oba tlaky rovnaly.

6. Tvar hladiny u stěny nádoby – teoretické odvození

Vyjdeme z rovnosti tlaku kapilárního a hydrostatického

$$\frac{\sigma}{r} = \rho g h$$

Křivostí K v matematice označujeme převrácenou hodnotu poloměru r hyperoskulační kružnice, tj. kružnice, která se v daném bodě ke křivce nejlépe „přimyká“. Výše uvedený vztah tedy můžeme psát takto

$$K\sigma = \rho g h$$

Z teorie ovšem plyne, že křivost dané křivky lze vyjádřit pomocí prostředků vyšší matematiky takto:

$$K = \left| \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right|$$

Využitím výše uvedených vztahů můžeme rovnici konvexní křivky vyjadřující tvar hladiny popsat diferenciální rovnicí

$$\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sigma = \rho g y$$

neboli

$$y'' = Ay\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}; A = \frac{\rho g}{\sigma}$$

Výše uvedenou diferenciální rovnici jsme řešili numericky v tabulkovém procesoru. Nejdříve jsme zadali parametry křivky v jejím nejvyšším bodě, a to jako vstupní hodnoty, tj. x = 0, y(0) = 0,0084 a stykový úhel 53,3°, tj. y´(0) = 0,754. Z nich jsme vypočetli druhou derivaci funkce y v bodě x = 0.

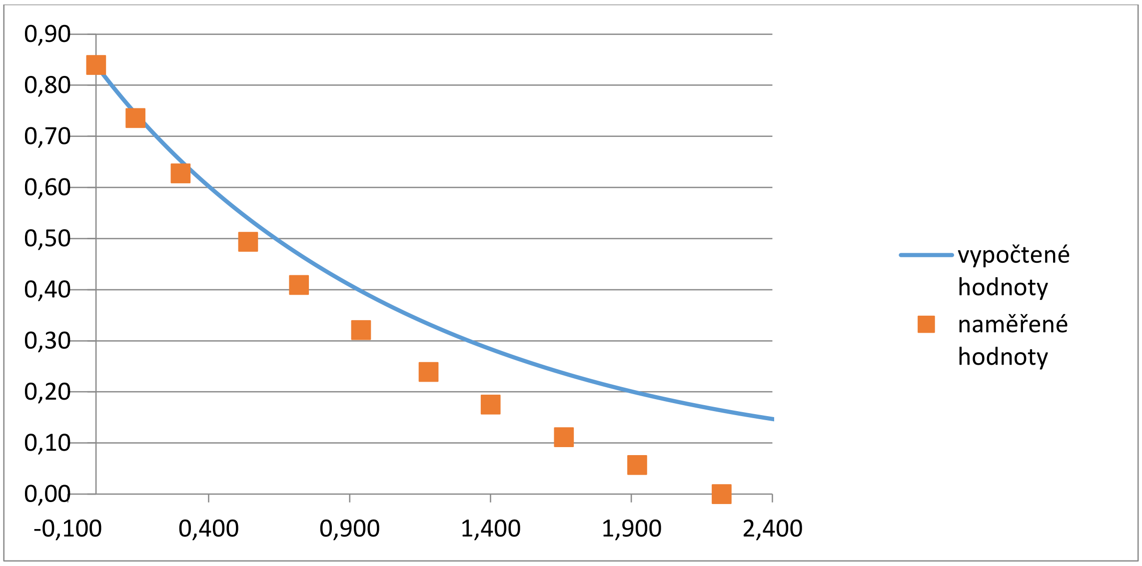
Pak jsme hodnotu x = 0 zvětšili o dx = 2.10^{-5} a pomocí vztahu

$$dy = y'dx$$

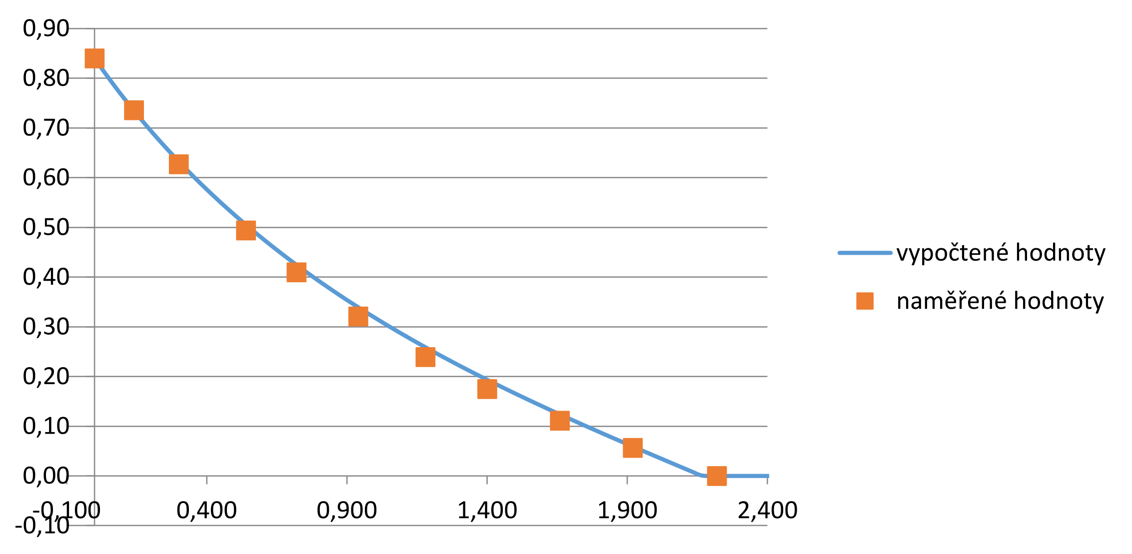
vypočetli přírůstek dy a z něho novou hodnotu y. Obdobným způsobem jsme vypočetli první derivace funkce y´ a novou hodnotu funkce y´ pomocí vztahu

$$dy' = y''dx$$

Známe-li ovšem hodnoty y a y´ v bodě x = 2.10^{-5}, tak již můžeme jednak znázornit příslušný bod grafu, jednak vypočítat i y´´. Potom nám již nic nebrání starou hodnotu x opět zvětšit o dx a celý postup dostatečně dlouho opakovat, dokud počítač nevykreslí celý graf (hodnoty x a y jsou v mm). Když následně náš graf porovnáme se skutečností, dostaneme toto:



Shoda teoretického modelu s fyzikálním měřením je sice dobrá, nikoliv však dokonalá. Pokud si však trochu pohrajeme se vstupními daty, dostaneme nejlepší shody pro hodnotu stykového úhlu ϴ = 50,5°, která je naší původní hodnotě 53,3° velmi blízká.



7. Závěr

a) Pomocí USB mikroskopu jsme vyfotografovali hladinu vody poblíž podložního sklíčka a její parametry jsme proměřili v programu Cabri Geometrie.

b) Praktickým měřením jsme dokázali, že kapalina u stěny nádoby nemá tvar části válcové plochy, ale že má vlivem hydrostatického tlaku proměnnou křivost. Stejně tak hladina kapaliny v kapiláře nemůže mít tvar kulového vrchlíku.

c) Odvodili jsme diferenciální rovnici křivky tuto hladinu popisující ve tvaru

$$y'' = Ay\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}; A = \frac{\rho g}{\sigma}$$

d) Výše uvedenou diferenciální jsme numericky vyřešili a prokázali, že její řešení je ve velmi dobré shodě s naměřenými hodnotami.

8. Dodatek 1 – Možnosti dalšího rozvíjení práce

Obdobnými metodami by bylo možnou zkoumat i kapky.

9. Dodatek 2

O rozvoj teorie povrchového napětí a kapilárních jevů se zejména zasloužili:

a) **Pierre Simon de Laplace**
Pierre Simon de Laplace byl francouzský fyzik, matematik a astronom. Byl členem Francouzské akademie věd, Královské společnosti v Londýně a také Komise pro míry a váhy. Již v útlém věku projevoval Laplace své matematické nadání, a tak byl již v šestnácti letech, po studiu na vojenské škole, přijat na univerzitu v Caen.
O dva roky později se Laplace vydal do Paříže, kde se chtěl setkat s matematikem a fyzikem d'Alembartem. Ten poznal,

že Laplace má velký talent a zařídil mu místo profesora matematiky na vysoké škole. V 80. letech 18. století se zabýval jedním z nejtíživějších teoretických problémů, a to stabilitou sluneční soustavy. Tento problém se mu podařilo v roce 1784 vyřešit, když vyvinul novou metodu na výpočet pohybu planet a dokázal její soulad s newtonovskou mechanikou. K jeho nejznámějším úspěchům patří teorie o vzniku sluneční soustavy, kde navazoval na Kantovy úvahy z roku 1754. Roku 1796 v této teorii také předpověděl existenci černých děr, když vyslovil hypotézu, že existují tak masivní hvězdy, že je nedokáže opustit světlo. Jeho nejvýznamnějším odkazem je však monumentální práce z teorie pravděpodobnosti. Laplace chápe pravděpodobnost jako nástroj pro popis problémů s neúplnou vstupní informací. Dále se mu podařilo objevit jednu z centrálních formulací teorie pravděpodobnosti – tzv. Bayesův teorém, který navíc zobecnil pro pokus jevů s obecným rozložením – tzv. apriorití informace. Z matematického hlediska je Laplaceovým nejdůležitějším bodem pravděpodobnostní teorie tzv. metoda generujících funkcí. Laplace navíc tuto teorii pravděpodobnosti aplikoval snad na všechna odvětví tehdejšího vědění a dal tak možnost vzniku velmi rozsáhlé práci o teorii pravděpodobnosti. Laplace však žil v době francouzských revolucí, a tak si svými politickými a náboženskými postoji a vědeckými úspěchy vytvořil mnoho nepřátel, což se po jeho smrti negativně odrazilo v jeho odkazu.

b) Thomas Young

Thomas Young byl britský polyhistor – vynikal především ve fyzice, lékařství a egyptologii. Již v dětství vynikal neobyčejným jazykovým nadáním, již ve čtrnácti letech ovládal třináct jazyků. V roce 1972 se zapsal ke studiu medicíny v Londýně, kde byl následně roku 1794 zvolen členem Královské společnosti. Dále pokračoval ve studiu v Edinburghu a o rok později také v Göttingenu, kde obdržel roku 1796 doktorský titul z fyziky. Roku 1799 se přestěhoval zpět do Londýna, kde začal působit jako lékař. Roku 1801 byl Young jmenován profesorem přírodní filozofie na Royal Institution, kterého se však o dva roky později vzdal, aby ho neomezovala v jeho lékařské praxi. Roku 1814 byl členem komise studující rizika spojená se zaváděním plynového osvětlení v Londýně a v roce 1816 tajemníkem komise, jež měla za úkol sestavit kyvadlo pro určení místní hodnoty gravitačního napětí. Několik let před svou smrtí se zabýval otázkami životního pojištění.

c) **Carl Friedrich Gauss**

Johann Carl Friedrich Gauss byl německý matematik a fyzik. Po studiích na gymnáziu mu bylo brunšvickým vévodou Karlem II. uděleno stipendium na Collegium Carolinum (dnešní Technická univerzita Brunšvik), kde pobýval v letech 1792-1795. Poté až do roku 1798 studoval na univerzitě v Göttingenu, kde znovuobjevil například binomickou větu či větu o prvočíslech. Průlom nastal v roce 1796, když se mu podařilo prokázat, že každý pravidelný mnohoúhelník s počtem stran rovným Fermatovu prvočíslu jde sestrojit jen pomocí kružítka a pravítka, což znamená, že je eukleidovsky konstruovatelný. Roku 1799 podal Gauss v disertační práci důkaz základní věty algebry. Tento důkaz však nebyl přijat, protože používal dosud nedokázanou Jordanovu větu. V roce 1801 se podílel na objevení planetky Ceres, když dokázal přesně předpovědět její pohyb a pozici, na které se bude znovu nacházet.

Roku 1807 se stal profesorem astronomie a ředitelem hvězdárny v Göttingenu. V tomto oboru přišel v roce 1828 s theoremou egrenium, tzv. významnou větou, zavádějící důležitou vlastnost popisující zakřivení. V roce 1831 Gauss navázal spolupráci s profesorem fyziky Wilhelmem Weberem, což vedlo k novému pochopení magnetismu a objevení Kirchhoffových zákonů. A v roce 1833 zkonstruovali první elektromagnetický telegraf, který spojoval hvězdárnu a institut fyziky v Göttingenu, což činí asi 1,2 kilometru.

10. Seznam literatury

http://147.33.74.135/knihy/uid_es-001/hesla/metody.elevace_na_desce.html
http://147.33.74.135/knihy/uid_es-001/hesla/laplaceova-youngova_rovnice.html
https://en.wikipedia.org/wiki/Young%E2%80%93Laplace_equation#History
https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_(scientist)#Young.E2.80.93Laplace_equation
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
http://artemis.osu.cz/fypx1/Balnar/4_2_4.htm
https://cs.wikipedia.org/wiki/Kapil%C3%A1ra
http://www.converter.cz/tabulky/povrchove-napeti.htm
http://www.realisticky.cz/ucebnice/02%20Fyzika%20S%C5%A0/02%20Molekulov%C3%A1%20fyzika%20a%20termika/05%20Kapaln%C3%A9%20skupenstv%C3%AD/01%20Povrchov%C3%A1%20s%C3%ADla,%20povrchov%C3%A9%20nap%C4%9Bt%C3%AD.pdf
HLAVIČKA, Alois (ed.). *Fyzika pro pedagogické fakulty*. 2. vyd. Praha: SPN, 1978.